This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Sci 885.42.4

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1843.)

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN. BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XV. HEFT.

EINLEITUNG IN DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE

DER HÖHEREN ALGEBRAISCHEN KURVEN

NACH DEN METHODEN VON JEAN PAUL DE GUA DE MALVES.

18817

EIN BEITRAG ZUR KURVENDISKUSSION VON

DR. PAUL SAUERBECK,
PROFESSOR AM GYMNASIUM REUTLINGEN.

MIT 76 ABBILDUNGEN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Sci 885.42.4
~~Math 8689.02~~
HARVARD C
JUN 16 1903
Haven fund.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit gab der Aufsatz der Herren von Brill-Tübingen und Nöther-Erlangen „Über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit", Band III der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Mit ihr will dem im Vorwort zu jenem Aufsatz ausgesprochenen Wunsche, „das Bild bedeutender Männer und ihrer Thätigkeit in dem Gedächtnis der jüngeren Generation frisch zu erhalten", Rechnung getragen werden, ein Wunsch, der in Bezug auf De Gua um so berechtigter erscheint, als seine Untersuchungen sich noch mit einem beträchtlichen Teil des analytisch-geometrischen Unterrichtsstoffes der Mittelschulen befassen und daher sowohl für diese Stufe als bei einleitenden Vorlesungen an der Hochschule mit Vorteil zu verwerten sind.

Die Arbeit folgt in ihren Methoden den in den „Usages de l'analyse de Descartes" niedergelegten Ausführungen De Gua's, weicht aber durch die moderne Art der Darstellung ab und führt zum Teil die Entwicklungen De Gua's weiter unter Hinweisen auf den Zusammenhang mit dem späteren Stand der Kenntnisse.

Reutlingen, im Juli 1902.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Abschnitt. Geschichtlicher Überblick über die Entwickelung der Kurvendiskussion von Descartes bis De Gua 1637—1740 . . . . Seite 1— 15

1. Einleitung. 2. Bestrebungen De Guas. 3. Descartes' Géométrie. Newtons Enumeratio. 4. Stirlings Lineae Newtonianae. 5. Mac Laurins Geometria. 6. Einfluſs der englischen Schule auf De Gua. 7. Die Differentialmethode. 8. Saurin. 9. Maupertuis. 10. Nicole, Clairaut. 11. De Bragelongne. 12. De Gua.

II. Abschnitt. Hilfsbetrachtungen . . . . . 16— 37

13—16. Die Bildung der Resultante. Methode von Newton, von Leibniz, von De Gua. 17. Die Huddesche Regel und die Bildung der Diskriminante. 18. Die lineare Transformation und das Taylorsche Theorem. 19. Das algebraische Dreieck von De Gua. 20—25. Die binomischen Kurven. 26. Die elementarsymmetrischen Wurzelfunktionen.

III. Abschnitt. Allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven nach dem Inhalt der Usages de l'analyse von De Gua . . 38—127

27—34. Durchmesser und Mittelpunkte. 28. Allgemeiner Durchmessersatz von Newton. 29. Satz über die Wendeasymptoten der Kurven III. Ordnung, Beweise von Stirling und De Gua. 30. Mittelpunkte. 31—34. Beispiele.

35—46. Asymptoten. 35—37. Asymptoten parallel den Koordinatenaxen. 38—43. Asymptoten in beliebiger Richtung. 39. Die Gleichung $\psi(z, u) = 0$. 44. Die Asymptotenschnittpunktsgleichung $F(C, x) = 0$. 45. Identität von ψ und F. 46. Die Regel von De Gua.

47—83. Die singulären Punkte. 47. 48. Besondere Punkte auf den Koordinatenaxen. 49. Der Newtonsche Sekantensatz. 50. 51. Singuläre Punkte im Ursprung mit den Koordinatenaxen als Tangenten. 52. Selbstberührung. 53. Die Schnabelspitze. 54. Der Spitzpunkt. 55—59. Singuläre Punkte im Ursprung mit beliebiger Tangentenrichtung. 60. Die mehrfachen und singulären Punkte der Kurven bis zur V. Ordnung. 61. Bedingungen für die Existenz besonderer Punkte im Endlichen und Unendlichen. 62. Analogie zwischen den Kurvenzweigen im Ursprung und im

Seite

Unendlichen. 63—67. Lineare Transformation und projektive Abbildung. 68. Abbildung der Kurven III. Ordnung nach De Gua. 69. Satz von De Gua über die Wendepunkte der Kurven III. Ordnung. 70. Beweis von De Gua. 71. Beweis von Mac Laurin. 72. Beweis mittels des Schnittpunktrestsatzes. 73—83. Singuläre Punkte aufserhalb des Ursprungs. 74. Gewöhnliche Tangenten. 75. Maxima und Minima. 76. Doppelpunkte. 77. Dreifache Punkte. 78. Vierfache Punkte. 79. k fache Punkte. 80. Äquivalenzzahl der k fachen Punkte. 81. Maximalzahl der Doppelpunkte und Geschlecht der Kurven. 82. Wendepunkte. 83. Flachpunkte.

84—89. Vergleich der analytischen und der Differentialmethode bezüglich der Aufsuchung ausgezeichneter Kurvenpunkte. 85. Doppelpunkte. 86—88. Wende- und Rückkehrpunkte. 89. Spitzpunkte und Flachpunkte.

IV. Abschnitt. Übungen nach de Gua . . . . . 128—163

90—95. Die Kurven dritter Ordnung $y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$. 96—101. Die Kassinoide. 102—104. Untersuchung zweier Kurven IV. Ordnung auf ihr Verhalten im Ursprung. 105. Untersuchung der Kurve III. Ordnung $xy^2 + ey = cx + d$ bezüglich ihrer unendlich fernen Äste. 106. Die parabolischen Kurven n ter Ordnung. 107—119. Die Systematik der Kurven II. und III. Ordnung.

Anhang. Biographische Notizen . . . . . 164—166

De Bragelongne, Clairaut, Cramer, Descartes, De Fontenelle, Girard, De Gua, Guisnée, De l'Hospital, Hudde, Mac Laurin, Leibniz, De Maupertuis, Newton, Nicole, Saurin, Stirling, Taylor.

I. Abschnitt.

Geschichtlicher Überblick über die Entwicklung der Kurvendiskussion von Descartes bis De Gua 1637—1740.

Einleitung.

1. In dem gemeinsam mit Herrn Nöther-Erlangen erstatteten Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Band III der Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, Jahrgang 1892/93, würdigt pg. 132—134 Herr von Brill-Tübingen, von welchem die Bearbeitung des älteren Zeitabschnitts herrührt, erstmals eingehender die Verdienste eines Mannes, der auf dem Gebiete der analytischen Geometrie als der hervorragendste unter den im Gefolge von Newtons epochemachender Enumeratio auftretenden Nacheiferern dieses grofsen Geometers betrachtet werden mufs: des Abbé Jean Paul de Gua de Malves. Das streng im Geiste des Descartes verfafste kleine Werk De Gua's, betitelt „Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres", Paris 1740. 12^0, 457 pp., dessen Format und Ausstattung, vielleicht nicht unabsichtlich, eher ein Gebetbuch denn eine Schrift mathematischen Inhalts vermuten läfst, repräsentiert in äufserst knapper und für die damalige Zeit schwer verständlicher Darstellung ein vollständiges Lehrbuch der analytischen Geometrie der ebenen algebraischen Kurven und ist ein Meisterstück des Scharfsinns, voll origineller Gedanken und feiner Bemerkungen. In einem Punkt dagegen läfst sich De Gua eine verhältnismäfsig geringfügige Übereilung zu Schulden kommen: er bestreitet die Existenz der von De l'Hospital aufgefundenen Spitze II. Art, der sog. Schnabelspitze (point de rebroussement de la 2e espèce), und dies scheint ihm den Tadel der Nachfolger in dem Mafse zugezogen zu haben, dafs darüber seine nicht geringen Verdienste um die Anwendung der Algebra auf Geometrie bis auf die neueste Zeit fast gänzlich in Vergessenheit geraten sind, noch Chasles streift in seinem Aperçu historique sur l'origine et le développement

des méthodes en géometrie, Paris 1875, die analytischen Leistungen De Guas nur flüchtig und unvollständig. Zu dieser Verdrängung De Guas hat vor allem Gabriel Cramers zehn Jahre später erschienene Introduction à l'analyse des courbes lignes algébriques, Genève 1750, beigetragen. Im Hinblick auf dieses umfangreiche, den damaligen Stand der Kenntnisse zu einem gewissen Abschlufs führende Kompendium einer Theorie der algebraischen Kurven, das zu einem grofsen Teil seines Inhaltes an die Usages de l'analyse erinnert, aber im Gegensatz zu diesen, wenn auch von einer gewissen Breite und Ängstlichkeit der Darstellung, doch leicht faſslich geschrieben ist und zudem in dem berühmten Abschnitt über die Méthodes des séries (Chap. VII) die Untersuchungen Eulers: Sur le point de rebroussement de la 2e espèce, Mém. de Berlin 1748, schon berücksichtigt, wird wohl De Gua von einer verbesserten Neuausgabe seines Buches abgesehen haben. An die Stelle der Usages tritt die vielgelesene Introduction, die lange Zeit hindurch die Führerschaft behält, obwohl bezüglich ihrer neuen Methoden und Sätze Gabriel Cramer vielfach nicht das Recht der Priorität zuerkannt werden kann.

Bestrebungen De Guas.

2. Die Ziele, welche De Gua mit seiner Arbeit verfolgt, sind im wesentlichen von zwei Gesichtspunkten aus zu betrachten: In erster Linie sucht er die Analysis des Descartes, die zur damaligen Zeit in ihrem eigensten Gebiet, dem der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften auf Grund der algebraischen Gestalt der Kurvengleichung, durch die obwohl ein halbes Jahrhundert jüngere Differentialrechnung verdrängt wurde, als die natürlichste und ursprüngliche Methode in ihre alten Rechte wieder einzusetzen, indem er, ein Meister in der Beherrschung derselben zeigt, wie sie in allen einschlägigen Fragen ein nicht weniger mächtiges Hilfsmittel darstellt denn die Differentialmethode, ja, dafs sie letzterer sogar überlegen ist, insofern sie dieselben Ergebnisse nicht nur durchaus elementar, sondern auch mit weit schärferer Begründung abzuleiten gestattet; in zweiter Linie sucht er, angeregt durch Newtons Enumeratio, erstmals eine allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven zu entwickeln. In diesem Sinn, sagt De Gua selbst in seiner Vorrede, möge sein Werk gleichsam als eine Extension des idées de deux grands hommes betrachtet werden.

Descartes Géométrie. Newtons Enumeratio.

3. Die Anfänge einer Theorie der algebraischen Kurven reichen nicht früher zurück als bis Descartes. Obwohl nach den Untersuchungen Zeuthens: Über die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886, schon Apollonius über den Begriff der Koordinaten verfügt und mit ihnen

in einer gewissen geometrischen Ausdrucksweise, die ihm die heutige Zeichensprache der Algebra ersetzt, operiert, so hat doch Descartes in seiner Schrift: La Géométrie, Leyden 1637, zuerst die Kurven höherer Ordnung durch Gleichungen ausgedrückt und damit überhaupt den Begriff der algebraischen Kurven geschaffen. Aber trotz der Universalität der neuen Lehre Descartes' gehen die Untersuchungen der nächst folgenden Zeit kaum über die Betrachtung der Kurven zweiter Ordnung hinaus und beschränken sich auch für höhere Kurven nur auf Einzelheiten, vgl. Chasles: Aperçu historique pg. 94—118. Die Grundlage zu einer allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven schafft erst beinahe siebzig Jahre später Newtons: Enumeratio linearum tertii ordinis, London 1704. Zwar war der Hauptzweck dieser Schrift, welche auf die Entwicklung der Geometrie einen so weittragenden Einfluſs ausgeübt hat, die Aufzählung und Klassifizierung der Kurven dritter Ordnung, von welchen bis dahin nur wenige Arten bekannt waren, allein indem Newton seine überraschend einfachen Sätze, welche in die erstaunliche Mannigfaltigkeit der Gestalten dieser Kurven Ordnung bringen, als Verallgemeinerungen der bekannten Durchmesser-, Sekanten-, Asymptoten- und projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte ohne Beweis veröffentlichte, gab er die erste mächtige Anregung zu einer Reihe ganz hervorragender Leistungen, welche, zunächst auf die Begründung jener Sätze gerichtet, eine allgemeine Theorie der algebraischen Kurven anstrebten. Die namhaftesten Vertreter dieser durch die Enumeratio auf ein halbes Jahrhundert hinaus bestimmten Richtung der Geometrie sind nach der Zeitfolge, in welcher sie ihre Schriften geometrischen Inhalts veröffentlichten: Jacob Stirling, Colin Mac Laurin, Nicole, Saurin, Maupertuis, De Bragelongne, De Gua und Gabriel Cramer.

De Guas Werk ist die erste allgemeine Kurvendiskussion in rein analytischer Behandlung. Welch bedeutende Fortschritte auf diesem Gebiet seit dem Erscheinen der Enumeratio diese Schrift nach Inhalt wie nach Methode aufweist, zeigt eine kurze Betrachtung der diesbezüglichen Litteratur der Vorgänger.

Jacob Stirlings Lineae Newtonianae.

4. Sieht man von der im Supplément du Journal des Sçavans, Septembre 1708 veröffentlichten kleinen Abhandlung des siebzehnjährigen De Bragelongne, des späteren Abbé, ab, die sich mit der Begründung des VI. Abschnitts der Enumeratio, der Descriptio organica curvarum mittels steter Bewegung zweier unveränderlicher Winkelgröſsen längs gegebener Leitlinien, befaſst, jedoch nur insoweit, als für die entstehenden geometrischen Örter dritten Grades die Gleichungen aufgestellt werden, ohne eine analytische

Diskussion anzuschliefsen, so ist die erste kurventheoretisch bedeutende Arbeit diejenige Jacob Stirlings, betitelt: Illustratio tractatus D. Newtoni de Enumeratione linearum tertii ordinis, Oxon. 1717. Hier zeigt Stirling zuerst, indem er die gerad- und krummlinigen Asymptoten, die in Newtons Enumeratio das Einteilungsprincip der Kurven dritter Ordnung abgeben, mit dem Approximationsverfahren der Reihen in Zusammenhang bringt, dafs Newton nur durch seine Fluxionsrechnung (Methodus fluxionum et serierum infinitarum, nach den Angaben von Newtons Biograph Brewster 1670 abgefafst) zu den glänzenden Ergebnissen seiner Enumeratio gelangt sein konnte. Stirling bestimmt die Asymptoten (Prop. VI) aus den Anfangsgliedern mit positiven Exponenten der nach fallenden Potenzen der Abscisse geordneten Reihe für die Ordinate des betreffenden Kurvenzweigs, zeigt (Prop. V), dafs, wenn die Abscissenaxe selbst Asymptote wird, die Ordinate nicht bis zum höchsten Grad der Kurvengleichung ansteigt, auch weifs er (Prop. I), dafs die unendlichen Zweige stets in gerader Anzahl auftreten und parallele Gerade eine Kurve in ebensoviel Punkten treffen, die imaginären eingerechnet, als der Grad der Gleichung angiebt, aber alle seine Untersuchungen über die Gestalt der Kurven beruhen auf Reihenentwicklungen, die Form der Gleichung selbst diskutiert er nicht analytisch, nur in Probl. IX zieht er die Anzahl der Koeffizienten in Betracht, um die Zahl $\frac{n(n+3)}{2}$ der die Kurve $n$ter Ordnung bestimmenden Punkte zu ermitteln. Auffallend ist, dafs Stirling mehrfache und singuläre Punkte nicht in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, obwohl er in den Reihen ein vorzügliches Mittel zu ihrer Untersuchung besessen hätte und zudem in Prop. II Ex. IV. V die Entwicklungen für die Ordinate mehrdeutig werden, also auf eine Kurvenverzweigung hinweisen. Bezüglich der verschiedenen Methoden der Reihenentwicklungen, die z. T. auf Angaben Newtons, wie z. B. dessen Diagramm beruhen, z. T. selbst erfunden sind, ist u. a. bemerkenswert, dafs schon Stirling den nach Mac Laurin benannten Satz, allerdings unter Beschränkung auf algebraische Funktionen, ausspricht (Prop. III) und ihn durch Beispiele erläutert.

Mac Laurin's Geometria.

5. Die nächste bedeutende Arbeit geometrischen Inhalts, die Geometria organica des damals neunzehnjährigen Mac Laurin, London 1720, kommt für die analytische Kurvendiskussion kaum in Betracht. Sie befafst sich, wie die eingangs erwähnte Abhandlung De Bragelongnes von der Descriptio organica curvarum Newtons ausgehend, mit der geometrischen Erzeugung höherer Kurven aus niederen, aber in einer Vielseitigkeit der Methoden, mit

welchen er zugleich Betrachtungen über algebraische Schnittpunktsätze verbindet, dafs sie für die heutige synthetische Geometrie der ebenen Kurven grundlegend geworden ist. Nur die singulären Punkte, die sich meist bei den nächstliegenden Erzeugungsarten einstellen, erfahren eine flüchtige analytische Behandlung, die zudem methodisch ungenau ist, so pg. 13 und pg. 59, wenn Mac Laurin aus dem Ausscheiden des Faktors x^2 bezw. x^3 aus der Kurvengleichung für $y = 0$ auf die Existenz eines Doppel- bezw. dreifachen Punkts im Ursprung schliefst, oder pg. 47, wenn er für eine Kurve vierter Ordnung aufser dem Doppelpunkt im Ursprung einen zweiten auf der Abscissenaxe im Abstand $x = a$ folgert, weil für $y = 0$ die Gleichung die Form annimmt $Ax^2(x - a)^2 = 0$. Noch weniger interessiert ihn die analytische Bestimmung der Asymptoten, seine einzige Kenntnis ist die schon von Stirling erwähnte, dafs die Ordinate Asymptote ist, wenn sie nicht bis zum höchsten Grad der Gleichung ansteigt pg. 21.

Einflufs auf De Gua.

6. Mit der Geometria Mac Laurin's erreichen die analytischen Leistungen der englischen Geometer, soweit sie in die Zeit vor dem Erscheinen der Usages de l'analyse fallen, ihren Abschlufs. Leider ist die analytisch so bedeutende Schrift Stirlings in ihrem wichtigsten Teil, der Theorie der Reihen, von De Gua gänzlich unbeachtet geblieben, eine charakterische Erscheinung der damaligen mathematischen Richtung des Festlandes, wo, im Gegensatz zur englischen Schule, unter dem allbeherrschenden Einflufs der Differentialrechnung das Interesse an Reihenentwicklungen gänzlich geschwunden war. Ihn interessiert einzig dasjenige Kapitel, das die Abzählung der 76 Kurvenarten dritter Ordnung behandelt, während gerade die Reihen, denen nach ihm Leonhard Euler und Gabriel Cramer ihre Erfolge verdanken, für seine Untersuchungen singulärer Stellen wichtige Anhaltspunkte geliefert, ihm vielleicht geradezu in dem strittigen Fall der Schnabelspitze Aufklärung gegeben hätten. Handelte es sich doch hier um eine innere Selbstberührung zweier Parabelbögen $(y^2 - ax)^2 = 0$, die sich in ihrem weiteren Verlauf einerseits reell, andererseits imaginär trennen, weshalb die für den Selbstberührungspunkt, die Schnabelspitze, bestehenden, im ersten Glied übereinstimmenden zwei Entwicklungen $y^2 = ax$ bis zum zweiten Glied weitergeführt werden müssen, wofür in der Stirling'schen Doppelreihe Prop. II, Ex. V ein geradezu typisches Beispiel vorgelegen hätte.

Die Differentialmethode.

7. Die analytischen Arbeiten der Vorgänger De Gua's auf dem Festlande tragen sämtlich den Charakter der Differentialrechnung. Die vielseitigen An-

wendungen, welche der von Newton und Leibniz geschaffene, überaus fruchtbare Begriff des Unendlichkleinen auf die Geometrie, insbesondere die Tangentenprobleme, zuliefs, schaffen hier neue analytisch-geometrische Begriffe und legen den Grund zu einer Theorie der singulären Punkte. Aufser von den beiden Bernoulli und Leibniz selbst, der bei seinen Untersuchungen über die Krümmungsverhältnisse einer Kurve für den Wendepunkt, ibi concavitas atque convexitas inter se permutantur, die Bedingung $d^2y = 0$ aufstellt unter der Annahme, dafs y und dy von Null verschieden sind (Nova method. pro max. et min. Acta erud. Lips. 1684, Math. Werke, Bd. V, pg. 221), geht die Hauptanregung hierzu aus von dem vielgelesenen umfassenden Werk des Marquis de l'Hospital, dem ersten systematischen Lehrbuch der Differentialrechnung: Analyse des Infiniment Petits, Paris 1696, insbesondere von den daselbst enthaltenen Betrachtungen über die Subtangente, den Krümmungshalbmesser und die Ermittlung unbestimmter Werte. Indem De l'Hospital die gleichzeitigen Änderungen der Abscisse und der Subtangente eines Kurvenpunkts studiert, wobei er unter letzterer den durch die Tangente bestimmten Abschnitt der Abscissenaxe versteht, ergiebt sich ihm zwischen Wendepunkt und Rückkehrpunkt oder Spitze I. Art (point de rebroussement de la 1e espèce) ein gewisser Gegensatz insofern, als für ersteren die Subtangente, für letzteren die Abscisse ein Extrem wird, woraus er nach Anwendung des üblichen Verfahrens der einmaligen Differentiation zur Ermittlung gröfster bezw. kleinster Werte die Kriterien $d^2y = 0$ für den Wendepunkt und $d^2y = \infty$ für den Rückkehrpunkt ableitet. Aus den Krümmungsverhältnissen zieht De l'Hospital keine Schlufsfolgerung auf den Rückkehr- bezw. Wendepunkt (art. 81); er bemerkt, dafs beide Punkte diesbezüglich genau dasselbe Verhalten beobachten, nämlich sowohl den Krümmungshalbmesser 0 als ∞ haben können (art. 82); dagegen giebt ihm die Evolvente der Spitze II. Art, die selbst wieder eine Schnabelspitze ist, deren Krümmungshalbmesser ein Extrem wird, Veranlassung, aus dem Ausdruck für letzteren die Existenzbedingung der Spitze II. Art

$$3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^3y}{dx^3}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = 0 \quad \text{oder } \infty$$

aufzustellen (art. 109). Diese auf den damals noch nicht so streng begründeten Begriff des Unendlichkleinen sich stützenden, nicht gänzlich einwandfreien Methoden der Beweisführung, die mehr durch die praktische Anwendung ihre Richtigkeit dokumentierten, und die Mehrdeutigkeit, die nicht nur dem letzten Kriterium, sondern ebenso den Kriterien für Rückkehr- und Wendepunkt anhaftet, insofern dieser z. B. im Falle die Ordinate Tangente wird, sich durch das Kriterium des Rückkehrpunkts bestimmt, bieten in der Folge De Gua eine der schönsten Gelegenheiten, die Überlegenheit der rein

algebraischen Analysis des Descartes in derartigen geometrischen Fragen über die Methoden der Differentialrechnung, was Schärfe und Klarheit anbelangt, darzuthun, indem er die Differentialkriterien aller ihm bekannten Singularitäten erstmals nach der Methode Descartes' streng analytisch begründet.

Saurin.

8. Den natürlichsten Zusammenhang zwischen der Differentialrechnung und der Theorie der mehrfachen bez. singulären Punkte, denjenigen, welchen die Berechnung unbestimmter Werte vermittelt, haben weder Joh. Bernoulli, der für die Methode der Differentiation des Zählers und Nenners das Recht der Priorität beansprucht (Acta erud. Lips. 1704), noch De l'Hospital erkannt (art. 169). Hier knüpfen die Arbeiten Saurins an, die für De Gua von unverkennbarem Einfluſs geworden sind. Saurin faſst erstmals die Spitze als Sonderfall des Doppelpunkts auf. Er bemerkt, daſs für diesen $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird, d. h. die Tangentenrichtungen scheinbar unbestimmt sind, und ermittelt die wahren Werte derselben unter Ausdehnung des Verfahrens von De l'Hospital in art. 163 auf den Fall, daſs Zähler und Nenner Funktionen beider Koordinaten sind, durch nochmalige Differentiation dieser Funktionen nach x und y aus einer in $\frac{dy}{dx}$ quadratischen Gleichung, deren Wurzeln für den Doppelpunkt reell und verschieden, für die Spitze reell und gleich und für den isolierten Punkt imaginär konjugiert sich ergeben (Journal des Sçavans, Janvier 1703). Die Ursache dieser Unbestimmtheit des ersten Differentialquotienten erblickt er darin, daſs für jeden Doppelpunkt Ordinate sowohl als Abscisse Doppelwurzeln der Kurvengleichung sind, folglich in unserer heutigen Ausdrucksweise noch einfache Wurzeln der ersten partiellen Differentialquotienten, d. h. des Zählers und Nenners des unbestimmten Bruchs sein müssen (vgl. später die Huddesche Regel). Diese Überlegungen veranlassen ihn zur Aufstellung des vollständigen Differentials der Kurvengleichung, die er zu diesem Zweck durch die Substitution $x + dx$, $y + dy$ an Stelle von x und y in eine nach steigenden Potenzen von dx und dy geordnete Reihe transformiert (Sur un cas singulier du problème des tangentes, Acad. de Paris 1706). Er erkennt, daſs das Aggregat der Glieder $k$ter Dimension in dx und dy durch $k$fache Differentiation nach x und y erhalten wird, wobei dx und dy wegen des Verschwindens der mit ihnen behafteten Terme als konstant zu betrachten sind und daſs dieses $k$te Differential, falls die sämtlichen vorhergehenden $k-1$ Differentiale 1., 2. bis $(k-1)$ter Ordnung identisch verschwinden, die Gleichung $k$ten Grads darstellt zur Berechnung der k Tangenten des $k$fachen Punkts, die je nach den

Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, dafs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläfst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, dafs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewufst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schlufsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, dafs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äufserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, dafs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, dafs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äufseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die aufser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, dafs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläfst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, dafs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewufst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schlufsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, dafs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äufserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, dafs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, dafs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äufseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die aufser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, daſs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläſst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, daſs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewuſst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schluſsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, daſs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äuſserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, daſs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, daſs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äuſseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die auſser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, daſs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläſst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, daſs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewuſst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schluſsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, daſs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äuſserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, daſs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, daſs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äuſseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die auſser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, daſs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläſst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, daſs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewuſst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schluſsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, daſs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äuſserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, daſs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, daſs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äuſseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die auſser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

De Bragelongne.

11. Einen kühnen Gedanken, die Aufzählung der Kurven vierter Ordnung nach dem Vorgang der Enumeratio, sucht die weit angelegte Arbeit des Abbé De Bragelongne: Examen des lignes du 4e ordre, Acad. de Paris 1730 und 1731, von welcher jedoch nur die vorbereitenden, drei gröfsere Einzelabhandlungen umfassenden Untersuchungen über die bei den Kurven vierter Ordnung auftretenden singulären Punkte erschienen sind, zu verwirklichen.

Um einen Punkt (a, b) als mehrfachen Kurvenpunkt zu erkennen, verfährt De Bragelongne zunächst rein analytisch: er ermittelt, ob $x - a$ bez. $y - b$ mehrfache Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und stellt bejahendenfalls die in den Punkt (a, b) als Ursprung transformierte Gleichung der Kurve auf, schneidet letztere durch die beide Nullpunkte verbindende Gerade $ay = bx$ und entscheidet alsdann die noch auftretenden Zweideutigkeiten durch den Schnitt der Kurve mit einer weiteren beliebig durch den neuen Ursprung gelegten Geraden $y = \lambda x$. Diese auf die Untersuchung von insgesamt fünf Gleichungen gestützten Betrachtungen ergeben ihm nach der Anzahl der zusammenfallenden Schnittpunkte eines Zweigs mit einer Schnittgeraden unendlich viele Arten von Flach- und Wendeflachpunkten (inflexions invisibles et visibles) und nach der Anzahl der mit Wendepunkten behafteten Zweige drei Arten von Doppelpunkten, vier Arten von dreifachen Punkten u. s. f. Den Entscheid über die Singularität des betreffenden $k$fachen Punkts giebt die Differentialrechnung nach der Beschaffenheit der Wurzeln des nach der Methode von Saurin aufgestellten $k$ten Differentials, aus welchem sich die Tangenten bestimmen, für $x = a$ und $y = b$ und zwar findet er fünf Doppelpunkte I. Art: Gewöhnlicher Doppelpunkt (point double ordinaire), Spitze I. Art (point de rebroussement), isolierter Punkt I. Art (point conjugué), Oskulation, d. h. Selbstberührung von aufsen und isolierter Punkt II. Art (Lemniscate infiniment petite), wobei Spitze I. Art und Oskulation, die beide zusammenfallende Tangenten haben, durch die Zahl drei bez. vier der mit der Tangente zusammenfallenden Kurvenschnittpunkte unterschieden werden, ferner vier dreifache Punkte I. Art: Gewöhnlicher dreifacher Punkt (point triple ordinaire), Spitze I. Art und isolierter Punkt I. Art mit je einem hindurchgehenden parabolischen Zweig (point triple invisible provenu d'une ovale adhérente), endlich der Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit). Wie mangelhaft die Aufzählung dieser Punkte noch ist, zeigt ein Vergleich mit der von De Gua auf pg. 142 gegebenen, die in zuvor nie erreichter Vollständigkeit und Ausdehnung mit einziger Ausnahme der Schnabelspitze und deren Kombinationen sämtliche mehrfachen und singulären Punkte bis einschliefslich der Kurven fünfter Ordnung umfafst, insbesondere hat De Gua

von den als Doppelpunkten zählenden Selbstberührungspunkten, wenn er auch die Schnabelspitze nicht gelten läfst, die erste richtige Auffassung und unterscheidet scharf drei Fälle:

Selbstberührung von aufsen oder „Oskulation“

$$(y^2 - 2px)\,(y^2 + 2qx) = 0,$$

Selbstberührung von innen oder „Embrassement“

$$(y^2 - 2px)\,(y^2 - 2qx) = 0,$$

deren nähere Untersuchung in dem besonderen Fall $p = q$, der zur Schnabelspitze führt, ihm nicht gelingt, und

Selbstberührung zweier imag. konjugierter Zweige

$$(y^2 - 2pix)\,(y^2 + 2pix) = 0$$

oder isolierter Punkt II. Art, den De Bragelongne zu speziell auffafst, indem allerdings die beiden eine Lemniskate bildenden Ovale beim Verschwinden eine derartige Berührung eingehen.

Ist der $k$fache Punkt (a, b) erst zu bestimmen, so geschieht dies im Anschlufs an das De l'Hospitalsche Verfahren zur Ermittlung unbestimmter Werte: Die k verschiedenen abwechselnd gleichen Zähler und Nenner der $k - 1$ Brüche, die man erhält, wenn man $k - 1$ mal jenes Verfahren der Differentiation von Zähler und Nenner der unbestimmten Brüche $\frac{dy}{dx}$ wiederholt (Acad. de Paris 1731, pg. 41), d. h. in unserer heutigen Ausdrucksweise, die k partiellen Differentialquotienten des $(k-1)$ten Differentials der Kurvengleichung betrachtet De Bragelongne als Hilfskurven (courbes auxiliaires) und ermittelt ihre gemeinsamen Schnittpunkte, befriedigen diese auch die gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$, so sind sie, schliefst er, $k$fache Punkte der Kurve. Er unterläfst also, zu untersuchen, ob die erhaltenen Lösungen auch den übrigen $\frac{k}{2}(k+1) - 1 - k$ partiellen Differentialquotienten der $k - 2$ ersten Differentiale genügen, was allerdings bei sämtlichen Beispielen De Bragelongnes infolge der speziellen Form der Kurvengleichungen zufällig statthat, eine Ungenauigkeit, auf die De Gua ebenfalls aufmerksam macht, indem er zugleich erstmals die strenge Forderung des Verschwindens sämtlicher $\frac{k}{2}(k+1) - 1$ partiellen Differentialquotienten der $k - 1$ ersten Differentiale zusammen mit $f(x, y) = 0$ als eindeutige und hinreichende Bedingung für die Existenz des $k$fachen Punkts ausspricht (Usages pg. 240). Hat einer der Zweige des $k$fachen Punkts in diesem Punkt einen Wendepunkt, so findet ihn De Bragelongne als derjenigen der k Tangenten zugehörig, welche die Kurve in $k + 2$ zusammenfallenden Punkten schneidet; die Aufsuchung für sich allein auftretender Wendepunkte, etwa nach dem Verfahren von De l'Hospital, ebenso wie die Untersuchung unendlich ferner Äste beschäftigen ihn nicht.

Den von De Bragelongne herrührenden, überaus fruchtbaren und rein analytischen Gedanken der Transformation zur Untersuchung singulärer Stellen nimmt später De Gua erfolgreich wieder auf, indem er seine Betrachtungen vorteilhaft auf eine einzige Transformationsgleichung beschränkt, die er gewandt in der Form der Taylor'schen Reihe aufstellt. Dafs De Bragelongne der Differentialmethode den ausgesprochenen Vorzug vor dem Transformationsverfahren giebt, mag in der Umständlichkeit und geringen Übersichtlichkeit begründet sein, wie er dieses Verfahren anwandte; jedenfalls aber verdankt er den tieferen Einblick in die analytische Form der Kurvengleichung nur seiner Methode der Transformation, dafür ist eines der bezeichnendsten Beispiele (art. 81) die Aufstellung der Gleichung einer Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten auf der Abscissenaxe, in der Form $y^4+(dx+e)y^3+(fx^2+gx+h)y^2+k(x-a)(x-b)(x-c)y+m(x-a)^2(x-b)^2=0$ und die Ableitung der Bedingung für die Existenz eines dritten Doppelpunkts dieser Kurve. An dieser Stelle schliefst er auch durch Induktion aus der Anzahl 1, 3, 6 u. s. f. der möglichen Doppelpunkte einer Kurve dritter, vierter, fünfter Ordnung u. s. f. auf die Maximalzahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ der Doppelpunkte einer algebraischen Kurve und beansprucht hierfür das Recht der Priorität, das jedoch Mac Laurin zuzuerkennen ist, der diese Zahl mit Hilfe seiner algebraischen Schnittpunktsätze ermittelt (Geometria organica, Sectio V, Lemma III, Coroll. IV).

De Gua.

12. De Bragelongne's Examen beschliefst die Reihe der kurventheoretischen Arbeiten der Vorgänger De Guas. Abgesehen von Descartes hat aufser der Enumeratio und den Arbeiten Saurins diese Schrift am meisten auf De Gua eingewirkt, wohl nicht allein durch die in ihr ausgesprochenen analytischen Gedanken, sondern ebenso durch die an die Enumeratio erinnernde Mannigfaltigkeit der Gestalten der Kurven vierter Ordnung, die schon durch das blofse Auftreten der durch Variation der Konstanten erhaltenen singulären Punkte dieser Kurven erreicht wird. Zum Unterschied jedoch gegen sämtliche früheren Auffassungen, die einesteils der analytischen Kurventheorie die Rolle einer Hilfswissenschaft der Algebra zuweisen, indem die Kenntnis der Kurven nur dazu diene, Probleme d. h. höhere algebraische Gleichungen aufzulösen (graphische Methode), eine Ansicht, die noch Newton mit Descartes teilt (Enumeratio Cap. VII: Constructio aequationum per descriptionem curvarum), anderntеils durch die Künstlichkeit der Methoden oder deren Schwerfälligkeit und die damit bedingte Einseitigkeit der Anwendung den inneren Zusammenhang zwischen algebraischer Form und geo-

metrischer Gestalt nur unvollständig klar legen, begründet De Gua dadurch, dafs er erstmals an Stelle der seitherigen Einzeluntersuchungen bestimmter Kurvenordnungen die Gleichung $n$ten Grades in x und y diskutiert, eine allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven als eines Wissenszweigs für sich und charakterisiert zugleich durch die bloſse Anwendung der Analysis des Descartes diese Methode als die natürlichste nicht nur insofern, als sie überhaupt genügt, die Kriterien für sämtliche gestaltliche Eigenschaften eindeutig mit Schärfe und Klarheit aufzustellen, sondern vor allem, weil sie ihre Ergebnisse aus der Form der Gleichung direkt entnimmt und hierdurch Algebra und Geometrie in unmittelbare Wechselbeziehung setzt. In einer Parallelen zwischen seiner und der Differentialmethode, anläſslich der Aufsuchung singulärer Punkte, zeigt er die Unzulänglichkeit der von De l'Hospital, Saurin und De Bragelongne gegebenen Begründungen, die sich auf das Wesen der Differentiale stützen, dafs jedes Differential der Kurvengleichung im Vergleich zu seinem vorhergehenden verschwindet; ihm dient deshalb die Differentialrechnung ohne jegliche geometrische Interpretation einzig als Rechnungsmethode für die leichtere Ausführung umständlicher algebraischer Operationen, als analytisches Hilfsmittel anerkennt er ihre ausschlieſsliche Herrschaft nur in der Anwendung auf transcendente Kurven, Rektifikation und Quadratur, Untersuchungen, bei denen die Analysis des Descartes als in der Natur ihres Wesens begründet versagen muſs, die daher De Gua auch von seinen Betrachtungen ausschlieſst.

Indem De Gua die zu untersuchende Singularität (p, q) mit Hilfe der Transformationsgleichungen (Fig. 1)

$$x = p + z + nu, \qquad y = q + mu$$

zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems macht und die Ordinatenaxe U desselben drehbar annimmt, gelingt es ihm, frei über die Tangenten des singulären Punktes zu verfügen und unter Benutzung des mit Unrecht nach Cramer benannten analytischen Dreiecks, in welches De Gua das Newton'sche Parallelogramm zweckmäſsig umgestaltet (von De Gua als triangle algébrique, später von Cramer als triangle analytique bezeichnet, siehe 19), die Näherungskurven für die Zweige des singulären Punkts im Ursprung in der heute noch üblichen Weise aufzustellen. Er erkennt, dafs der die Singularität des Ursprungs darstellende Term in ebensoviel Faktoren von der Form

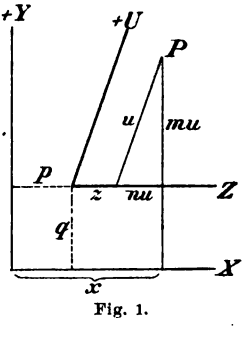

Fig. 1.

$$y^m = A x^n$$

(m und n ganze positive Zahlen) zerfällt, als Zweige vorhanden sind, dafs

diese Faktoren also die parabolischen Näherungskurven der einzelnen Zweige darstellen; dafs letztere aber auch teilweise imaginär werden können, übersieht De Gua deshalb, weil er zur Definition eines Zweigs den ersten Term Ax^n für hinreichend hält, dem gegenüber wegen der Kleinheit von x alle folgenden höheren Terme vernachlässigt werden können, eine Ansicht, die Euler erstmals widerlegt (Mém. de Berlin 1749, pg. 203), indem er zeigt, dafs für gewisse Werte von x wohl das erste Glied einer Potenzreihe reell, das zweite jedoch imaginär sein könne und also gegen das erste nicht vernachlässigt werden dürfe, wie dies gerade im Fall der Schnabelspitze zutrifft, wo die Entwicklung

$$y = Ax^2 \pm Bx^{\frac{5}{2}}$$

nur für positive Werte von x reell ist. Ein grofser Fortschritt aber ist nun, dafs De Gua sich nicht auf die Untersuchung der einen, das Verhalten der Kurve im Ursprung charakterisierenden Dreiecksecke beschränkt, die beiden anderen Ecken geben ihm den Verlauf der Kurve in den unendlich fernen Punkten der Koordinatenaxen und der sie verbindende, das Dreieck abschliefsende Streckenzug die den anderen unendlich fernen Punkten zustrebenden Äste. Aus diesen Betrachtungen findet er, dafs in gleicher Weise, wie endliche Zweige sich nur durch dreierlei Punkte hindurch fortsetzen (vgl. 9), auch nur drei Arten von unendlich fernen Zweigen, hyperbolischen sowohl als parabolischen, bestehen, eine Analogie, die ihn veranlafst, den Ursprung des Koordinatensystems ins Unendliche zu verlegen. Dies erreicht er geometrisch durch die schon von Nicole richtig aufgefafste Newton'sche Genesis curvarum per umbras (vgl. 10): er erzeugt sämtliche Arten unendlich ferner Zweige als zentralprojektive Bilder der Zweige eines im Endlichen liegenden Ursprungs und definiert somit erstmals alle in ihrem Verlauf von dem der konischen Hyperbel abweichenden unendlich fernen Äste als singuläre Punkte; algebraisch vermittelt ihm diese zunächst räumliche kollineare Verwandtschaft die lineare Transformation

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{u}{z},$$

durch welche für die transformierte Kurve, wenn sie in der Ebene der ursprünglichen Kurve dargestellt wird, nur die Lage des alten Koordinatensystems sich ändert, indem die den ursprünglichen Nullpunkt charakterisierende Ecke des analytischen Dreiecks mit einer der beiden anderen Ecken sich vertauscht, während die projektiven Eigenschaften sämtlich erhalten bleiben. Mit dieser gleichwertigen Auffassung sämtlicher Ecken des analytischen Dreiecks nähert sich De Gua schon dem Gedanken der Einführung

homogener Koordinaten, den jedoch erst Möbius in seinem baryzentrischen Calcul verwirklichte (1827).

Eines der schönsten Ergebnisse der projektiven Betrachtungen De Guas ist der Satz über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung. Die von Newton in der Enumeratio angegebene Eigenschaft der mit drei Paaren hyperbolischer Zweige behafteten Kurven dritter Ordnung, der sog. Hyperbolae redundantes, dafs, wenn zwei dieser Paare einen Durchmesser haben, d. h. auf derselben Seite der Asymptote verlaufen, das dritte Paar notwendig dieselbe Lage zur Asymptote hat, erkennt De Gua, indem er die unendlich ferne Gerade ins Endliche projiziert und jene besondere Art hyperbolischer Zweige als unendlich ferne Wendepunkte deutet, als einen Sonderfall der allgemeinen Eigenschaft der Kurven dritter Ordnung, dafs, wenn dieselben zwei Wendepunkte besitzen, sie noch einen dritten haben müssen, der mit den beiden ersten auf einer Geraden liegt. Der Ursprung dieses auf pg. 225 erstmals von De Gua ausgesprochenen Satzes, den De Gua aufserdem auf pg. 315 rein analytisch beweist, wird gewöhnlich fälschlicherweise auf die acht Jahre nach den Usages de l'analyse erschienene Algebra des Mac Laurin zurückgeführt, in dessen Anhang er sich, aber nur mit Hilfe der Differentialrechnung, bewiesen findet.

Auch in algebraischen Fragen, im besonderen in Bezug auf Elimination, zeigt De Gua eine originale Auffassung. Statt der von Newton in der Arithmetica universalis, pg. 73, aufgestellten Tabelle der Resultanten zweier Gleichungen bezw. zweiten, zweiten und dritten, dritten Grads einer Veränderlichen benutzt De Gua eine durchaus elementare Methode, die zwar schwerfällig ist, aber sicher zum Ziel führt, weshalb man neuerdings wieder auf sie zurückgreift, wenn es sich um strenge Begründung der Sätze über die Resultante handelt: er eliminiert eine Veränderliche aus zwei Gleichungen beliebig hohen Grads nach dem Kettenbruchverfahren, das schon Euklid zur Ermittlung des gröfsten gemeinschaftlichen Teilers anwendet, die Bedingung für eine gemeinschaftliche Wurzel d. h. die Resultante ist alsdann der Rest, der sich am Schlusse einstellt. Das Leibniz'sche Verfahren, das sich auf die Elimination mehrerer Veränderlicher aus einem System linearer Gleichungen gründet, scheint, obwohl es neben der Newton'schen Tabelle die einzige damalige Kenntnis bezüglich der Herstellung der Resultante bildet, De Gua nicht bekannt gewesen zu sein.

Für das Verständnis der analytischen Untersuchungen De Guas bedarf es zunächst einiger Hilfsbetrachtungen.

II. Abschnitt.

Hilfsbetrachtungen.

Die Bildung der Resultante.

13. Die vor De Gua bekannten Methoden sind diejenigen von Newton und Leibniz. Auf die von Newton aufgestellte Tabelle der Resultanten der Gleichungen bis zum dritten Grad (Arithmetica universalis pg. 73) nimmt De Gua öfters Bezug.

Die Reduktionsmethode von Newton.

14. Dieselbe besteht darin, dafs die beiden gegebenen Gleichungen je zu einer dritten von niedererem Grad kombiniert werden, bis man schliefslich zu zwei linearen Gleichungen gelangt: Man berechne aus jeder der beiden gegebenen Gleichungen die höchste Dimension der zu eliminierenden Gröfse, nachdem man zuvor nötigenfalls durch Multiplikation mit einer passenden Potenz derselben diejenige der beiden Gleichungen, die niedereren Grades ist, auf den Grad der anderen erhöht hat, und setze diese beiden Werte einander gleich, so hat man eine Gleichung (A) von niedererem Grade; indem man diese wieder mit einer der beiden gegebenen in derselben Weise kombiniert, erhält man eine zweite von niedererem Grade (B), die nun mit jener zuerst abgeleiteten (A) zu kombinieren ist u. s. f.

Erstes Beispiel. Aus den beiden quadratischen Gleichungen

(1) $$ax^2 + bx + c = 0,$$

(2) $$fx^2 + gx + h = 0$$

folgt

$$x^2 = -\frac{bx+c}{a} \quad \text{und} \quad x^2 = -\frac{gx+h}{f},$$

somit

$$\frac{bx+c}{a} = \frac{gx+h}{f},$$

woraus die gemeinschaftliche Wurzel von (1) und (2)

$$x = \frac{ah - cf}{bf - ag}$$

und somit durch Einsetzen in (1) die Resultante

(3) $$a(ah - cf)^2 + b(ah - cf)(bf - ag) + c(bf - ag)^2 = 0,$$

oder nach Vereinfachung

(3a) $$(ah - cf)^2 - (ag - bf)(bh - cg) = 0.$$

Zweites Beispiel. Die Resultante zweier Gleichungen zweiten und dritten Grades:

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2) $$fx^2 + gx + h = 0$$

ergiebt sich wie folgt:

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2a) $$fx^3 + gx^2 + hx = 0,$$

woraus

$$x^3 = -\frac{bx^2 + cx + d}{a} \quad \text{und} \quad x^3 = -\frac{gx^2 + hx}{f},$$

somit

(3) $$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{gx^2 + hx}{f},$$

womit die Aufgabe zurückgeführt ist auf den eben behandelten Fall zweier quadratischer Gleichungen:

(3) $$(bf - ag)x^2 + (cf - ah)x + df = 0,$$

(3) $$fx^2 + gx + h = 0.$$

Drittes Beispiel: Die beiden kubischen Gleichungen

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2) $$fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$$

geben

$$x^3 = -\frac{bx^2 + cx + d}{a} \quad \text{und} \quad x^3 = -\frac{gx^2 + hx + k}{f},$$

somit

$$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{gx^2 + hx + k}{f},$$

oder

(3) $$(bf - ag)x^2 + (cf - ah)x + (df - ak) = 0,$$

oder

(3a) $$(bf - ag)x^3 + (cf - ah)x^2 + (df - ak)x = 0$$

und somit aus (1) und (3a)

(4) $$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{(cf - ah)x^2 + (df - ak)x}{bf - ag},$$

womit die Aufgabe wieder zurückgeführt ist auf den zuerst behandelten Fall zweier quadratischer Gleichungen:

$$(4)\quad (b(bf-ag)-a(cf-ah))x^2+(c(bf-ag)-a(df-ak))x+d(bf-ag)=0,$$

$$(3)\quad (bf-ag)\cdot x^2+(cf-ah)\cdot x+df-ak=0.$$

Anmerkung: Mit diesen Ergebnissen gelingt die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Veränderlichen bis zum dritten Grade, z. B. aus

$$(1^*)\quad Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Fx^2+Gxy+Hy^2+Kx+Ly+M=0,$$

$$(2^*)\quad A'x^3+B'x^2y+C'xy^2+D'y^3+F'x^2+G'xy+H'y^2+K'x+L'y+M'=0,$$

indem man sie nach fallenden Potenzen der zu eliminierenden Veränderlichen, etwa x, ordnet, wie folgt

$$(1a)\quad Ax^3+(By+F)x^2+(Cy^2+Gy+K)x+(Dy^3+Hy^2+Ly+M)=0,$$

$$(2a)\quad A'x^3+(B'y+F')x^2+(C'y^2+G'y+K')x+(D'y^3+H'y^2+L'y+M')=0,$$

so dafs in Übereinstimmung mit (1) und (2) in (4) und (3) zu setzen ist:

$$a=A \qquad f=A'$$
$$b=By+F \qquad g=B'y+F'$$
$$c=Cy^2+Gy+K \qquad h=C'y^2+G'y+K'$$
$$d=Dy^3+Hy^2+Ly+M \qquad k=D'y^3+H'y^2+L'y+M',$$

womit die Resultante aus (4) und (3), d. h. das x-Eliminat aus (1*) und (2*) sich als Gleichung 9. Grades in y ergiebt.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten von Leibniz.

15. Hat man zwei Gleichungen desselben Grades, so multipliziere man beide mit einem unbestimmten Ausdruck vom nächst niedereren Grad, der so beschaffen ist, dafs die höchsten Potenzen beider Gleichungen gleiche Koeffizienten und entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Durch Addition der Produkte entsteht eine Gleichung, deren einzelne Terme man gleich Null setze. Man erhält dann eine Gleichung mehr als unbestimmte Koeffizienten vorhanden sind und zwar sind diese Gleichungen linear. Hiermit ist das Problem zurückgeführt auf die Elimination aus einem System von linearen Gleichungen, das Leibniz löst durch eine systematische Bezeichnung der Koeffizienten durch Stellenzeiger, ein Kunstgriff, der Leibniz bekanntlich zum Erfinder der Determinanten gemacht hat (Brill, Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1892/93, pg. 126).

Erstes Beispiel:

$$(1)\quad ax^2+bx+c=0,$$

$$(2)\quad fx^2+gx+h=0,$$

woraus

$$(ax^2 + bx + c)(fx + \alpha) + (fx^2 + gx + h)(-ax + \beta) = 0,$$

oder

$$(a\alpha + f\beta + bf - ag)x^2 + (b\alpha + g\beta + cf - ah)x + c\alpha + h\beta = 0,$$

somit

$$a\alpha + f\beta + bf - ag = 0, \tag{3}$$

$$b\alpha + g\beta + cf - ah = 0, \tag{4}$$

$$c\alpha + h\beta = 0, \tag{5}$$

und daher die Resultante

$$\begin{vmatrix} a & f & bf - ag \\ b & g & cf - ah \\ c & h & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

oder, entwickelt

$$(bf - ag)(bh - cg) + cf(cf - ah) - ah(cf - ah) = 0,$$

oder

$$(cf - ah)^2 - (ag - bf)(bh - cg) = 0. \tag{6a}$$

Meist formt man die Determinante (6) um in die sog. Rückungsdeterminante. Man erhält aus (6)

$$\begin{vmatrix} a & f & b \\ b & g & c \\ c & h & a \end{vmatrix} \cdot f - \begin{vmatrix} a & f & g \\ b & g & h \\ c & h & f \end{vmatrix} \cdot a = a \cdot \begin{vmatrix} a & g & f \\ b & h & g \\ c & f & h \end{vmatrix} + f \cdot \begin{vmatrix} b & a & f \\ c & b & g \\ a & c & h \end{vmatrix},$$

oder

$$= \begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot \\ b & a & g & f \\ c & b & h & g \\ a & c & f & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot \\ b & a & g & f \\ c & b & h & g \\ \cdot & c & \cdot & h \end{vmatrix} = 0. \tag{6b}$$

Zweites Beispiel: Entsprechend ergiebt sich die Resultante aus zwei Gleichungen verschiedenen Grades, z. B. vom dritten und zweiten:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

$$fx^2 + gx + h = 0, \tag{2}$$

indem diejenige niedereren Grades durch Hinzufügen der mit Null behafteten fehlenden Potenzen auf den höheren Grad ergänzt wird. Alsdann ergiebt sich

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(0 \cdot x^2 + \alpha x + \beta) + (0 \cdot x^3 + fx^2 + gx + h)(ax^2 + \gamma x + \delta) = 0,$$

oder

$$(a\alpha + af)x^4 + (b\alpha + a\beta + f\gamma + ag)x^3 + (c\alpha + b\beta + g\gamma + f\delta + ah)x^2 + (d\alpha + c\beta + h\gamma + g\delta)x + (d\beta + h\delta) = 0$$

und somit das Gleichungssystem

$$a\alpha + af = 0, \tag{3}$$

$$b\alpha + a\beta + fy + ag = 0, \tag{4}$$

$$c\alpha + b\beta + g\gamma + f\delta + ah = 0, \tag{5}$$

$$d\alpha + c\beta + a\gamma + g\delta = 0, \tag{6}$$

$$d\beta + h\delta = 0, \tag{7}$$

das nur bestehen kann unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ b & a & f & \cdot & g \\ c & b & g & f & h \\ d & c & h & g & \cdot \\ \cdot & d & \cdot & h & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

woraus durch Umstellung der drei letzten Vertikalreihen die Resultante in der Form der Rückungsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot & \cdot \\ b & a & g & f & \cdot \\ c & b & h & g & f \\ d & c & \cdot & h & g \\ \cdot & d & \cdot & \cdot & h \end{vmatrix} = 0.$$

Das Kettenbruchverfahren von De Gua.

16. Die beiden quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

$$fx^2 + gx + h = 0 \tag{2}$$

ergeben folgende Staffelrechnung:

$$ax^2 + bx + c \;\Big|\; fx^2 + gx + h \;\Big|\; \frac{f}{a}$$

$$fx^2 + \frac{bf}{a}x + \frac{cf}{a}$$

$$\left(g - \frac{bf}{a}\right)x + \left(h - \frac{cf}{a}\right) \;\Big|\; ax^2 + bx + c \;\Big|\; \frac{a}{g - \frac{bf}{a}}x + \frac{a}{ag - bf}\left(b - a \cdot \frac{ah - cf}{ag - bf}\right)$$

$$ax^2 + a \cdot \frac{h - \frac{cf}{a}}{g - \frac{bf}{a}}x$$

$$\left(b - a \cdot \frac{ah - cf}{ag - bf}\right)x + c$$

$$\left(b - a \cdot \frac{ah - cf}{ag - bf}\right)x + \frac{ah - cf}{ag - bf}\left(b - a \cdot \frac{ah - cf}{ag - bf}\right)$$

somit Rest: $c - \frac{ah - cf}{ag - bf}\left(b - a \cdot \frac{ah - cf}{ag - bf}\right) = 0,$ (3)

oder $$c(bf-ag)^2+b(ah-cf)(bf-ag)+a(ah-cf)^2=0,$$

oder

$$(ah-cf)^2-(ag-bf)(bh-cg)=0 \tag{3a}$$

in Übereinstimmung mit (14) als Bedingung einer gemeinschaftlichen Wurzel der gegebenen Gleichungen (1) und (2), d. h. deren Resultante. Diese Wurzel ergiebt sich aus dem letzten Divisor, dem gröfsten gemeinschaftlichen Teiler von (1) und (2):

$$\left(g-\frac{bf}{a}\right)x+\left(h-\frac{cf}{a}\right)=0$$

zu

$$x=\frac{ah-cf}{bf-ag}$$

(vgl. 61, b).

Die Hudde'sche Regel und die Bildung der Diskriminante.

17. *Satz von Hudde:* Multipliziert man die einzelnen Glieder einer nach fallenden Potenzen der Veränderlichen geordneten Gleichung $n$ten Grades, die k gleiche Wurzeln hat, mit den entsprechenden Gliedern einer beliebigen abnehmenden arithmetischen Reihe, so hat die neue Gleichung noch $k-1$ jener gleichen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Wählt man zunächst die besondere, von n bis 0 abnehmende arithmetische Reihe, so lautet die aus der vorliegenden Gleichung

$$f(x)=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\cdots+Lx+M=0 \tag{1}$$

nach der Hudde'schen Regel abgeleitete neue Gleichung

$$n\cdot Ax^n+(n-1)Bx^{n-1}+\cdots+Lx=0,$$

oder

$$(n\cdot Ax^{n-1}+(n-1)Bx^{n-2}+\cdots+L)x=0,$$

oder

$$n\cdot Ax^{n-1}+(n-1)Bx^{n-2}+\cdots+L=0, \tag{2}$$

d. h. man erhält das gleich Null gesetzte erste Differential $f'(x)$ der gegebenen Gleichung. Nimmt man nunmehr die Multiplikation von (1) mit einer beliebigen abnehmenden Reihe

$$m,\quad m-1,\quad m-2,\quad \cdots m-n$$

vor, so entspricht dies einer Multiplikation mit

$$(m-n)+n,\quad (m-n)+n-1,\quad (m-n)+n-2,\quad \cdots(m-n)+0,$$

d. h. einer Multiplikation mit einer beliebigen Gröfse $m-n$ und der besonderen von n bis 0 abnehmenden Reihe, die Hudde'sche Gleichung hat somit die Form

$$H(x)=(m-n)f(x)+f'(x)=0$$

und reduziert sich daher wegen (1) wieder auf

$$f'(x) = 0. \tag{2a}$$

Hieraus folgt, wie Guisnée zuerst gezeigt hat (Acad. de Paris 1706, pg. 50), die Identität mit dem Differentiationsprozefs: die Hudde'sche Regel ist die allgemeinste Art der Differentiation einer rationalen algebraischen Gleichung.

Hat somit die gegebene Gleichung k gleiche Wurzeln, d. h. ist sie von der Form

$$f(x) = A(x-\alpha)^k \cdot \varphi(x) = 0, \tag{1*}$$

so folgt

$$f'(x) = Ak(x-\alpha)^{k-1} \cdot \varphi(x) + A(x-\alpha)^k \cdot \varphi'(x) = 0,$$

oder

$$= A(x-\alpha)^{k-1} \cdot \{k \cdot \varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)\} = 0,$$

oder

$$H(x) = A(x-\alpha)^{k-1} \cdot \psi(x) = 0. \tag{2*}$$

d. h. die Hudde'sche Gleichung enthält $k-1$ dieser Wurzeln und bildet man von dieser Gleichung selbst wieder die Ableitung, so ist diese von der Form

$$\mathfrak{H}(x) \equiv H'(x) \equiv f''(x) = A(x-\alpha)^{k-2} \cdot \chi(x) = 0, \tag{3*}$$

enthält also noch $k-2$ jener Wurzeln. Ist somit $x = \alpha$ eine Doppelwurzel der gegebenen Gleichung (1*), so ist sie noch eine einfache Wurzel der Hudde'schen Gleichung (2*) und die Bedingung, dafs diese beiden Gleichungen

$$f(x) = 0, \tag{1*}$$
$$H(x) \equiv f'(x) = 0 \tag{2*}$$

eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. ihre Resultante, die in diesem besonderen Fall als Diskriminante bezeichnet wird, ist zugleich die Bedingung einer Doppelwurzel der gegebenen Gleichung (1*); entsprechend ist die Bedingung einer dreifachen Wurzel von (1*) identisch mit der Bedingung einer gemeinsamen Wurzel der Gleichungen

$$f(x) = 0, \tag{1*}$$
$$H(x) \equiv f'(x) = 0, \tag{2*}$$
$$\mathfrak{H}(x) \equiv f''(x) = 0, \tag{3*}$$

für deren gleichzeitiges Bestehen man drei von einander abhängige Diskriminanten, also zwei von einander unabhängige Bedingungen in den Koeffizienten der gegebenen Gleichung erhält u. s. f.

Um die zur Bildung der Diskriminante notwendige Hudde'sche Gleichung in der möglichst einfachen Form zu erhalten, benützt De Gua meist symmetrische arithmetische Reihen, wie

$$n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots 0 \cdots,\ -(n-2),\ -(n-1),\ -(n),$$

oder Reihen, deren Endglied 0 ist.

Die lineare Transformation und das Taylor'sche Theorem.

18. Schon Bernoulli zeigt (vgl. 8), dafs die Newton'sche Entwicklung nach dem Binomiallehrsatz durch den Differentialprozefs ersetzt werden kann. Vergleicht man nämlich das $(k-1)$te Differential der Potenz x^n, d. h.

$$d_{k-1}x^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1},$$

wobei dx als konstant vorausgesetzt ist, mit dem $k$ten Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$, in welche x^n übergeht durch Substitution von $x+dx$ an Stelle von x, also mit

$$\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1},$$

so stimmen beide Ausdrücke überein bis auf einen Faktor $(k-1)!$.

Das $k$te Glied des Binoms $(x+dx)^n$ ergiebt sich somit als das mit $(k-1)!$ dividierte $(k-1)$te Differential der Potenz x^n.

Diese Betrachtungen erweitert Saurin auf die Bildung der Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ aus $f(x,y)=0$ und findet auf Grund der Untersuchung einzelner Beispiele, dafs die neue Gleichung sich darstellt als die Summe aus der ursprünglichen Gleichung und den bis zum Grad der Gleichung ansteigenden Differentialen, dagegen macht er auf die Division letzterer mit den von Bernoulli angegebenen Faktoren nicht aufmerksam, weil bei seinen Tangentenuntersuchungen die einzelnen Differentiale der Kurvengleichung nur für sich allein als Gleichungen in Betracht kommen. Erst De Gua giebt die genaue allgemeine Beziehung zwischen Differential und transformiertem Term für zwei Variable. Bildet man für irgend einen Term Ax^py^q der ursprünglichen Gleichung $f(x,y)=0$ einerseits die Transformation $A(x+dx)^p\cdot(y+dy)^q$

$$= A\left[x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}dx + \binom{p}{2}x^{p-2}ax^2 + \cdots + \binom{p}{p}dx^p\right]$$
$$\cdot\left[y^q + \binom{q}{1}y^{q-1}dy + \binom{q}{2}y^{q-2}dy^2 + \cdots + \binom{q}{q}dy^q\right],$$

andererseits die $(p+q)$ Differentiale

$$d_1 = A\left[px^{p-1}y^q dx + qx^p y^{q-1}dy\right]$$

$$d_2 = A\left[p(p-1)x^{p-2}y^q dx^2 + 2pqx^{p-1}y^{q-1}dxdy + q(q-1)x^p y^{q-2}dy^2\right] \text{ u. s. w.}$$

so zeigt sich, dafs nach Ausführung der Multiplikation der transformierte Term sich darstellt als die Summe aus dem ursprünglichen Term und den bis zur Dimension des Terms ansteigenden Differentialen, letztere dividiert mit den entsprechenden Fakultäten $1!\,2!\cdots$ bis $(p+q)!$; was somit für einen einzelnen Term der ursprünglichen Gleichung gilt, gilt für sämtliche

Terme derselben d. h. die transformierte Gleichung kann auf die Form gebracht werden:

$$f(x+dx, y+dy) = f(xy) + \frac{1}{1!} d_1 f(x,y) + \frac{1}{2!} d_2 f(x,y) + \cdots + \frac{1}{n!} d_n f(x,y),$$

aufserdem ordnet De Gua die einzelnen Differentiale nach Potenzen von dx und dy und schreibt

$$d_1 f(x,y) = a_1 dx + a_2 dy,$$
$$d_2 f(x,y) = a_{11} dx^2 + a_{12} dx\, dy + a_{22} dy^2,$$

wodurch die transformierte Gleichung schliefslich die vollkommene Gestalt der Taylor'schen Reihe für zwei Variable annimmt:

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{dx} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\right) + \cdots.$$

Auf diese Entwicklung wird De Gua geführt einzig durch das Bestreben, die häufig wiederkehrenden linearen Transformationen, auf welchen fast sämtliche Schlufsfolgerungen seiner analytischen Untersuchungen beruhen, rasch und übersichtlich durchzuführen, eine Aufgabe, die er mit diesem erstmals von ihm aufgestellten Hilfsmittel genau in der heutzutage üblichen Weise erledigt mit dem blofsen Unterschied, dafs er die Koeffizienten a nicht als partielle Differentialquotienten zu berechnen weifs, sondern sie durch vollständige Differentiation ermittelt. Wird z. B. die Ordinatenaxe sich selbst parallel um den Abstand p verschoben, ist also, wenn die neuen Koordinaten mit z, u bezeichnet werden,

$$x = p + z, \qquad y = u,$$

so erhält man, wenn in der Taylor'schen Reihe x, y, dx, dy durch $p, u, z, 0$ ersetzt werden, die transformierte Gleichung der gegebenen Kurve $f(xy) = 0$ nach steigenden Potenzen der Abscisse z entwickelt, wie folgt:

$$\varphi(z,u) = f(p,u) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} z^n = 0.$$

Oder, wird z. B. die Kurve $f(x,y) = 0$ von einem durch einen beliebigen Punkt (p, q) gehenden Strahl geschnitten, wofür die Transformationsgleichungen in Polarkoordinaten lauten

$$x = p + r \cdot \cos\varphi, \qquad y = q + r \cdot \sin\varphi,$$

oder

$$x = p + nu, \qquad y = q + mu$$

mit der bei De Gua üblichen Bezeichnungsweise

$$r = u, \qquad \sin\varphi = m, \qquad \cos\varphi = n,$$

so ergiebt sich mit p, q, nu, mu an Stelle von x, y, dx, dy als Schnittpunktsgleichung

$$\psi(u) = f(p, q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} n + \frac{\partial f}{\partial y} m\right) u + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} nm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} m^2\right) u^2 + \cdots = 0.$$

Das algebraische Dreieck von De Gua.

19. Es scheint, dafs Newton durch die damals schon bekannte Lehre von den Dezimalbrüchen auf den Gedanken der Reihenentwicklung geführt wurde. Einen Vorgang hierfür bot ihm die Abhandlung von Merkator über die Quadratur der Hyperbel, worin dieser die elementaren Rechenoperationen von der Arithmetik auf die Algebra überträgt, indem er statt der absteigenden Potenzen von 10 die nach Dimensionen geordneten Potenzen der unbestimmten Gröfse bis ins Unendliche nimmt. Wie der Vorteil in der Anwendung der Dezimalbrüche darauf beruht, dafs die Operationen mit gebrochenen Zahlen in der einfachsten Weise durch solche mit ganzen Zahlen ersetzt werden können, so zeigt Newton, wie mit Hilfe ähnlicher Entwicklungen komplizierte algebraische Ausdrücke in Bruchform oder Wurzelgröfsen, auch die Wurzeln nicht reiner Gleichungen auf die Form von unendlichen Reihen gebracht werden können, deren Glieder einfache Zähler und Nenner haben, also keine Schwierigkeit mehr bieten. Das Newton'sche Verfahren besteht nun in einer successiven Verbesserung eines ersten zunächst noch fehlerhaften Wurzelwerts. Um diesen zu finden (Opuscula Newtoni Isaaci, Methodus fluxionum et serierum infinitarum, pg. 41), sucht er aus den Gliedern, in denen y bezw. x nicht vorkommt, den hinsichtlich x bezw. y niedrigsten Term, also zwei Terme, für welche die Progression der Dimensionen beider Variabeln möglichst klein ist, und dazu noch alle Terme, deren Dimensionen in der gleichen Progression auftreten, wenn man letztere beliebig fortsetzt. Um diese Auswahl leichter treffen zu können, benutzt Newton die graphische Darstellung: er analysiert die Gleichung der Kurve mit Hilfe eines Diagramms, das heute noch klassische Bedeutung besitzt und nach seinem Erfinder als Newton'sches Parallelogramm bezeichnet wird (Fig. 3). Ordnet man in der jetzt üblichen Darstellungsweise (Fig. 2) die Glieder einer algebraischen Gleichung als Punkte zwei Axen zu, deren Einheiten nach Potenzen von x bezw. y fortschreiten, so sind sämtliche Glieder, die auf derselben Geraden liegen, von gleicher

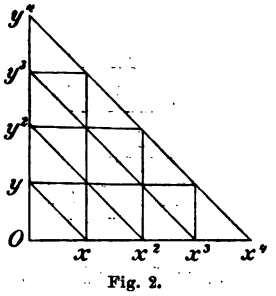

Fig. 2.

Ordnung (unendlich grofs bezw. unendlich klein), alle oberhalb bezw. unterhalb liegenden Glieder sind von höherer bezw. niederer Orduung. Der Beweis (nach Cramer) beruht darauf, dafs die Exponenten von x und y aller auf einer Geraden liegenden Glieder in arithmetischer Progression fortschreiten. Sind nämlich $Ax^m \cdot y^n$ und $Bx^{m+k} \cdot y^{n+l}$ zwei durch eine Gerade verbundene Glieder, deren Ordnung als gleich vorausgesetzt wird, für welche sich also die Kurvengleichung reduziert auf

(1) $$Bx^{m+k} \cdot y^{n+l} = Ax^m \cdot y^n \quad \text{oder} \quad x^k \cdot y^l = C,$$

so liegen, wenn der Einfachheit halber die Koeffizienten nicht geschrieben werden, sämtliche Glieder der Reihe

$$\ldots \; x^{m-2k} \cdot y^{n-2l}, \quad x^{m-k} \cdot y^{n-l}, \quad x^m \cdot y^n, \quad x^{m+k} \cdot y^{n+l}, \quad x^{m+2k} \cdot y^{n+2l}, \; \ldots$$

auf derselben Geraden wie die zu vergleichenden Terme und alle sind von derselben Ordnung, denn, dividiert man die Reihe mit $x^m \cdot y^n$, so resultiert die neue Reihe

$$\ldots \quad x^{-2k} \cdot y^{-2l}, \quad x^{-k} \cdot y^{-l}, \quad 1, \quad x^k \cdot y^l, \quad x^{2k} \cdot y^{2l}, \quad \ldots$$

und da 1 bezw. C endlich ist, so ist der Voraussetzung (1) gemäfs auch $x^k \cdot y^l$ und somit jedes Glied der letzten Reihe endlich, folglich alle Glieder der ersten Reihe von der Ordnung des Gliedes $x^m \cdot y^n$. Geht die Gerade durch das Glied x^r der X-Axe, so sind alle Glieder der Geraden von der Ordnung des Gliedes x^r; geht aber die Gerade zwischen x^r und x^{r+1} hindurch, so liegt die Ordnung der Glieder der Geraden zwischen derjenigen der Glieder x^r und x^{r+1}, d. h. alle oberhalb bezw. unterhalb der Geraden liegenden Glieder sind auch von höherer bezw. niederer Ordnung als die Glieder der Geraden selbst. Dieses Newton'sche Parallelogramm, in welchem ursprünglich jeder Term der Kurvengleichung durch den Diagonalschnittpunkt eines Parallelogramms bezw. Quadrats bezeichnet ist (Fig. 3), ändert De Gua,

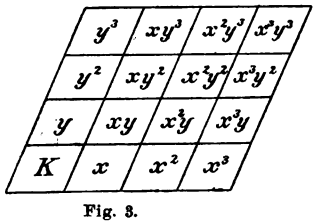

Fig. 3.

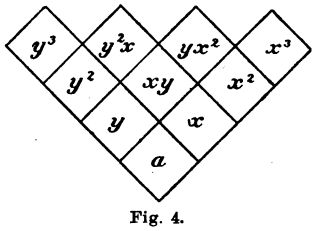

Fig. 4.

der diese Darstellungsweise der Terme noch beibehält, behufs bequemerer Ordnung der Gleichung nach Potenzen der Veränderlichen, ab in ein Dreieck (le triangle algébrique, später von Cramer als triangle analytique bezeichnet), indem er die beiden Axen, die sog. Banden ohne x bezw. ohne y, unter 45^0 gegen die Horizontale stellt (Fig. 4), dann geben die horizontalen Reihen die nach

x sowohl als nach y und die zur Bande ohne y bezw. ohne x parallelen Reihen die nach y bezw. x geordnete Gleichung. Mit Hilfe dieses Dreiecks ermittelt De Gua in der heute noch üblichen Weise erstmals die Näherungskurven im Ursprung sowohl wie in den unendlich fernen Punkten der Koordinatenaxen oder in beliebigen anderen unendlich fernen Punkten nach folgender

Hauptregel: Legt man nach Einzeichnung der Glieder der Kurvengleichung das analytische Dreieck auf die Bande ohne x (ohne y), so sind für eine unendlich grofse bezw. unendlich kleine Abscisse (Ordinate) nur diejenigen Glieder als die gröfsten bezw. kleinsten zu betrachten, oberhalb bezw. unterhalb deren Verbindungsgeraden kein weiteres Glied der Gleichung sich befindet, und das gleich Null gesetzte Aggregat dieser Glieder, auf welches sich die Kurvengleichung reduziert, ist die Gleichung der Näherungskurve in dem durch die betreffenden Koordinatenextreme bestimmten Punkt (Ursprung, unendlich ferner Punkt einer Koordinatenaxe, beliebiger anderer Punkt der unendlich fernen Geraden).

De Gua behandelt nun insbesondere diejenigen Fälle, in welchen die direkte Anwendung des Newton'schen Parallelogramms bezw. des algebraischen Dreiecks zur Ermittlung der Näherungskurven nicht zum Ziel führt, was stets statt hat, sobald das Aggregat der Glieder höchster bezw. niederster Dimension vollständig ist. Hier transformiert De Gua vorher die gegebene Kurvengleichung:

$$f(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n + \cdots = 0,$$

indem er die Ordinatenaxe in die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote bezw. Ursprungstangente dreht, setzt also

$$x = nu + z, \qquad y = mu,$$

wo $\frac{m}{n}$ eine der Wurzeln $\frac{y}{x}$ des gleich Null gesetzten Aggregats der Glieder höchster bezw. niederster Dimension ist, und erhält hierdurch die nach Potenzen von z entwickelte transformierte Gleichung

$$\varphi(z, u) = f(nu, mu) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} z^n,$$

in welcher aufser dem konstanten Glied die höchste Potenz z^n bezw. die niederste Potenz von u verschwindet. Einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn die höchsten bezw. niedersten Aggregate mehrfache oder gemeinsame Faktoren haben, wie z. B. bei der Kurve vierter Ordnung (Usages pg. 399)

$$\text{(I)} \qquad (u + z)^4 - 6az(u + z)^2 - 8a^2u^2 - 16a^2uz - 7a^2z^2 = 0,$$

wo das Newton'sche Parallelogramm allein wieder nicht genügt, indem es die Existenz eines Doppelfaktors des Aggregats der Glieder vierter und dritter

Dimension nicht zum Ausdruck bringt und nur die Richtung $(u+z)^4=0$ des unendlich fernen Punktes angiebt, nicht aber die Art desselben näher charakterisiert. Setzt man hier z. B. schiefwinklige unter 60^0 geneigte Axen voraus und bezieht die Kurve auf ein neues Koordinatensystem mit demselben Ursprung, aber einer gegen die Z-Axe unter 60^0 (gegen die U-Axe unter 120^0) gedrehten X-Axe, setzt also (Fig. 5)

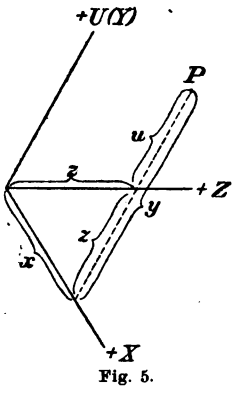

Fig. 5.

$$x=z, \qquad y=u+z,$$

so lautet die transformierte Gleichung:

(II) $\qquad y^4-6axy^2-8a^2y^2+a^2x^2=0$

und das algebraische Dreieck ergiebt

für $x=\infty$, $y=\infty$ aus

$y^4-6axy^2+a^2x^2=0$ oder $y^2=(3\pm 2\sqrt{2})ax$

die beiden in der Richtung der X-Axe gelegenen unendlich fernen parabolischen Punkte

(III) $\qquad y^2=(3+2\sqrt{2})ax \qquad$ und $\qquad y^2=(3-2\sqrt{2})ax.$

Meist rechnet De Gua in solchen Fällen wie (I) die Transformation nicht durch, sondern schliefst aus der Beschaffenheit der ursprünglichen Gleichung ohne weiteres auf die Form der transformierten Gleichung und hieraus mittels des algebraischen Dreiecks auf den Verlauf der Kurve im Ursprung bezw. in den unendlich fernen Punkten.

Die binomischen Kurven: $x^m \cdot y^n = a$.

20. Nächst der Geraden haben die binomischen Kurven die einfachste Gleichungsform und werden daher zur Diskussion algebraischer Kurven als Näherungskurven verwendet. Je nachdem m und n von gleichem oder ungleichem Zeichen sind, hat man den Typus der Hyperbel oder denjenigen der Parabel.

I. Die binomischen Parabeln

$$x^m \cdot y^{-n} = C \qquad \text{oder} \qquad x^m = C \cdot y^n.$$

21. Hier können nach den einfachsten Repräsentanten drei Haupttypen unterschieden werden. Vorausgesetzt $m > n$, giebt

a) m gerade, n ungerade: $x^2=y$ die Ovalparabel (parabole conique),

b) m ungerade, n ungerade: $x^3=y$ die Wendeparabel (1^e parabole cubique),

c) m ungerade, n gerade: $x^3=y^2$ die Rückkehrparabel (2^e parabole cubique)

Der vierte Fall, m gerade und n gerade, reduziert sich durch Wurzelziehen auf die drei ersten Fälle. Jede dieser drei Haupttypen ist selbst wieder Ausgangsort für eine unendliche Anzahl von Varietäten, die mit dem betreffenden Haupttypus in der Art der Krümmung übereinstimmen und nur bezüglich des Grades derselben abweichen:

22. a) *Typus der gewöhnlichen Parabel:*

$x^2 = y$ erste Ovalparabel (parabole conique, point ordinaire) (Fig. 6),

$x^4 = y$ erste Flachpunktsparabel (point de serpentement, point de double inflexion) (Fig. 9),

$x^4 = y^3$ erste Spitzpunktsparabel (point de double pointe, Lemnisceros infiniment petit) (Fig. 14),

$x^6 = y$ zweite Flachpunktsparabel (point de quatre inflexions) (Fig. 11),

$x^6 = y^5$ zweite Spitzpunktsparabel (point de quatre pointes) (Fig. 17),

$x^8 = y$ dritte Flachpunktsparabel (point de six inflexions),

$x^8 = y^3$ zweite Ovalparabel mit dreifachem Punkt im Ursprung, letzterer ist eine Vereinigung des Spitzpunkts mit dem Flachpunkt (siehe Fig. 18) und nähert sich daher gestaltlich wieder dem Oval.

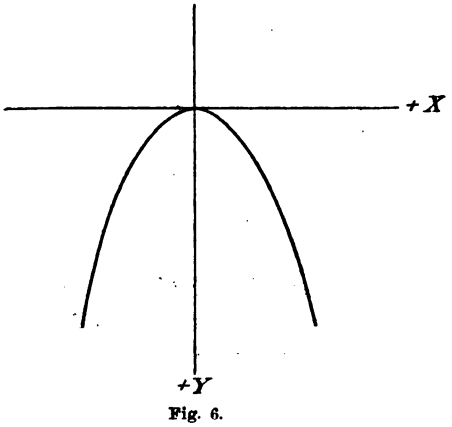

Fig. 6.

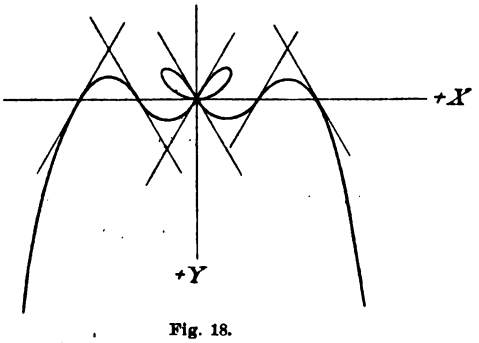

Fig. 18.

Entstehung des Flachpunkts: Trennt man die vier auf der Abscissenaxe als Tangente im Ursprung zusammenfallenden Punkte der Flachpunktsparabel, am besten in symmetrischer Weise, so ist die allgemeinere, in Fig. 7 dargestellte Kurve

$$y = x^4 - bx^2 + c,$$

wobei $b^2 > 4c$. Für $c = 0$ fallen zwei dieser Schnittpunkte im Ursprung zusammen und die nach dem analytischen Dreieck diskutierte Kurve (Fig. 8)

$$y = x^4 - bx^2$$

geht schliefslich für $b = 0$ in die Flachpunktsparabel Fig. 9 über (vergl. Maupertuis).

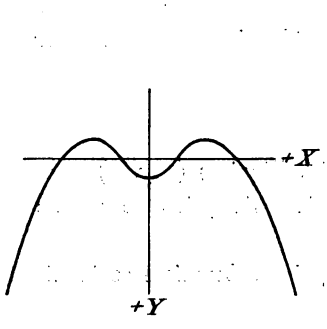

Fig. 7.

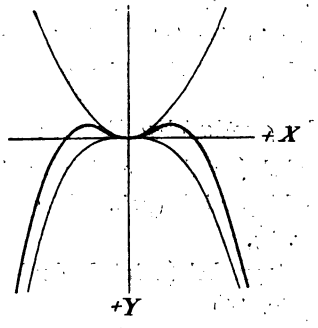

Fig. 8.

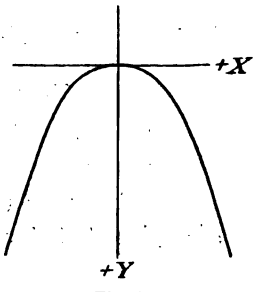

Fig. 9.

Die Entstehung der zweiten Flachpunktsparabel Fig. 11 veranschaulicht Fig. 10.

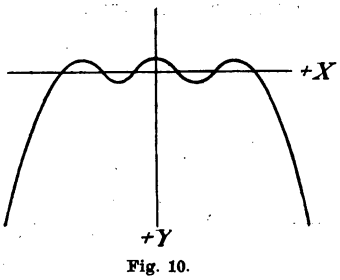

Fig. 10.

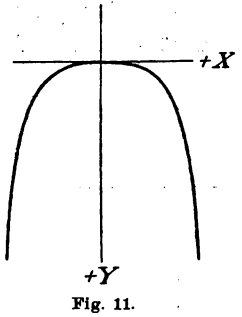

Fig. 11.

Entstehung des Spitzpunkts: Trennt man die drei mit der Abscissenaxe im Ursprung zusammenfallenden Tangenten $y = 0$ in symmetrischer Weise, so entsteht die allgemeinere, nach dem analytischen Dreieck in Fig. 12 diskutierte Kurve

$$x^4 + (b^2x^2 - y^2)y = 0$$

mit $y = 0$, $y + bx = 0$, $y - bx = 0$ als Tangenten im Ursprung, einem dreifachen Punkt. Für $b = 0$ fallen die beiden letzten Tangenten mit der ersten zusammen, die beiden Schleifen verschwinden und der Ursprung wird zum Spitzpunkt (Fig. 14). Der Spitzpunkt geht somit aus dem allgemeinen dreifachen Punkt in analoger Weise hervor wie der Rückkehrpunkt aus dem Doppelpunkt und ist daher zum Unterschied gegen den Flachpunkt als Singularität zu betrachten: Jede Gerade durch den Spitzpunkt schneidet die Kurve in drei in diesem Punkt zusammenfallenden Punkten, die Tangente

sogar in vier, während der Flachpunkt nur als einfacher Punkt zählt, der nur von seiner Tangente in mehr als einem Punkt getroffen wird (vergl. die Entstehung des Spitzpunkts aus zwei Spitzen und einem Doppelpunkt Fig. 13 nach Maupertuis).

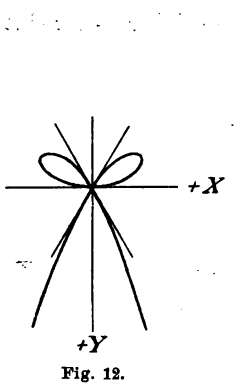

Fig. 12.

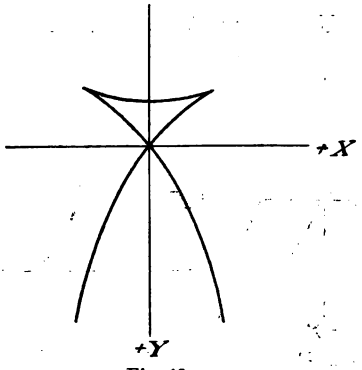

Fig. 13.

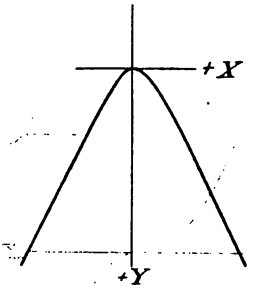

Fig. 14.

Die Entstehung der zweiten Spitzpunktsparabel mit fünffachem Punkt im Ursprung veranschaulicht Fig. 15 bezw. 16.

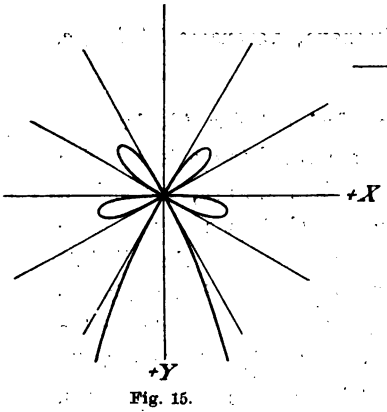

Fig. 15.

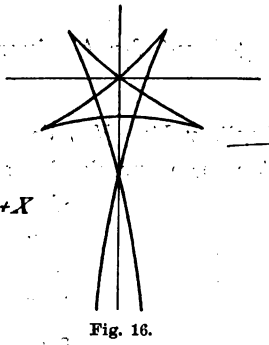
Fig. 16.

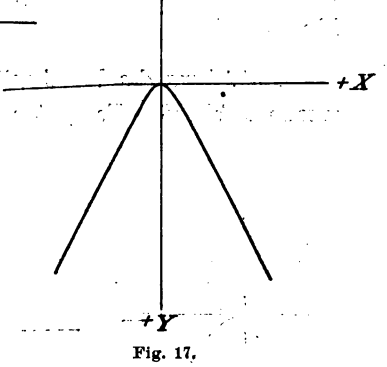

Fig. 17.

23. b) *Typus der Wendeparabel:*

$x^3 = y$ Wendeparabel (1e parabole cubique, point de simple inflexion) Fig. 19,

$x^5 = y$ Wendeflachparabel (point de triple inflexion) Fig. 21,

$x^5 = y^3$ Wendespitzparabel (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion) Fig. 23, u. s. w.

Entstehung des Wendeflachpunkts: Durch symmetrische Trennung der

fünf mit der Abscissenaxe als Tangente zusammenfallenden Schnittpunkte erhält man die allgemeinere Kurve

$$x(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) = y$$

mit drei Wendepunkten: Ursprung mit Wendetangente $y - b^2c^2 \cdot x = 0$ nebst

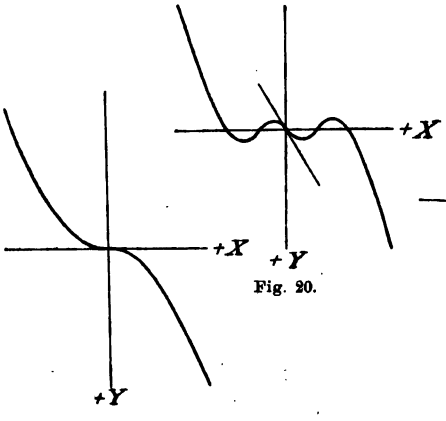

Fig. 20.

Fig. 19.

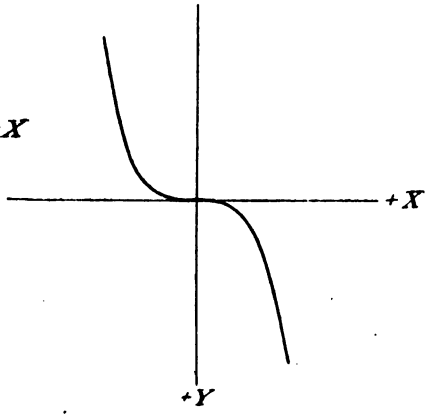

Fig. 21.

den beiden Schnittpunkten $\pm b$ auf der Abscissenaxe, vorausgesetzt $b < c$, Fig. 20.

Entstehung des Wendespitzpunkts: Von den drei mit der Abscissenaxe zusammenfallenden Tangenten kann nur die eine als Wendetangente für sich abgesondert werden, die beiden anderen sind als zusammenfallende Tangenten eines Selbstberührungspunkts bezw. als zusammenfallende Wendetangenten beizubehalten (vergl. hiermit die Entstehung des Spitzpunkts). Die allgemeinere Kurve lautet daher (Fig. 22)

$$x^5 = (y - bx)y^2,$$

sie besitzt nach dem analytischen Dreieck im Ursprung die

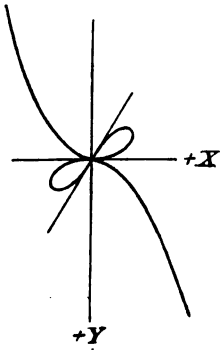

Fig. 22.

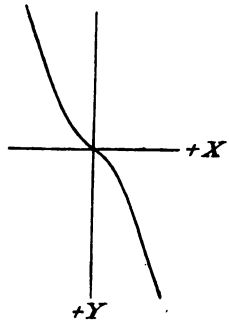

Fig. 23.

parabolische Selbstberührung

$$x^2 - \sqrt{b} \cdot y = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + \sqrt{b} \cdot y = 0.$$

24. c) *Typus der Rückkehrparabel:*

$x^3 = y^2$ Rückkehrparabel, Spitze I. Art (2e parabole cubique, point de rebroussement de la 1e espèce) Fig. 25,

$x^5 = y^2$ Rückkehrflachparabel (rebroussement du 2^d ordre) Fig. 27,

$x^5 = y^4$ Rückkehrspitzparabel (point de triple pointe) Fig. 30, u. s. w.

Entstehung des Rückkehrpunkts: Trennt man die beiden, die Abscissenaxe darstellenden Tangenten $y^2 = 0$, deren jede die Kurve in drei im Ursprung zusammenfallenden Punkten schneidet, am besten in symmetrischer Weise und schreibt dieselben

$y - bx = 0$ und $y + bx = 0$,

so lautet die allgemeinere Kurve (Fig. 24)

$$x^3 = (y - bx)(y + bx),$$

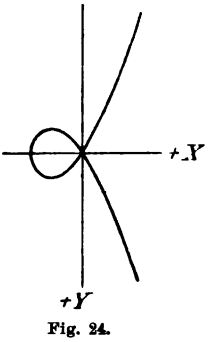

Fig. 24.

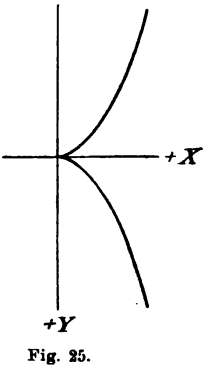

Fig. 25.

Dieselbe hat im Ursprung einen Doppelpunkt, der für $b = 0$ in die Spitze übergeht (vergl. Saurin 8).

Entstehung des Rückkehrflachpunkts: Betrachtet man den Ursprung wieder als Doppelpunkt mit getrennten Tangenten, so mufs die allgemeinere Kurve, wenn sie wieder zum Ursprung zurücklaufen soll, von der Abscissenaxe noch

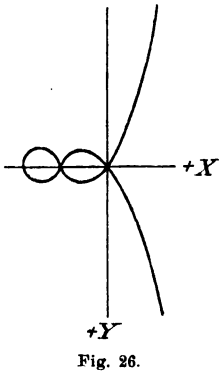

Fig. 26.

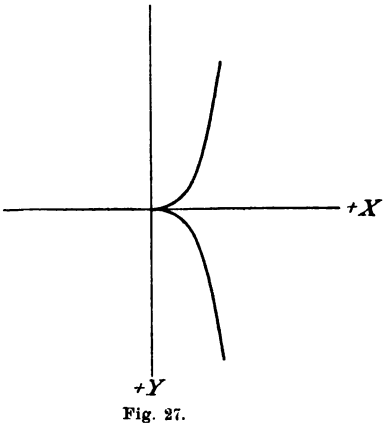

Fig. 27.

in einem weiteren Doppelpunkt und einem einfachen Punkt geschnitten werden (Fig. 26), ihre Gleichung lautet daher

$$x^2(x-b)^2(x-c) = y^2.$$

Sie hat im Ursprung das Tangentenpaar $(y - b\sqrt{c}\cdot x)(y + b\sqrt{c}\cdot x) = 0$, ferner in $x = b$ einen Doppelpunkt mit zwei Wendetangenten und geht für $b = 0$ und $c = 0$ über in die Rückkehrflachparabel. (Ce rebroussement renferme deux inflexions dans son folium évanouissant, sagt De Gua).

Entstehung des Rückkehrspitzpunkts: Trennt man die vier mit der Ab-

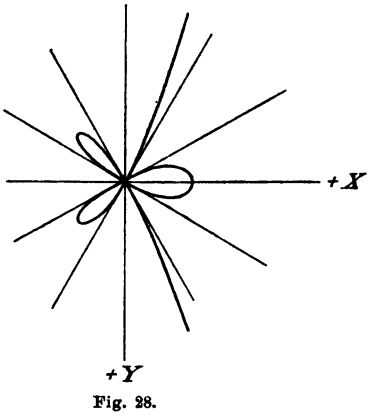

Fig. 28.

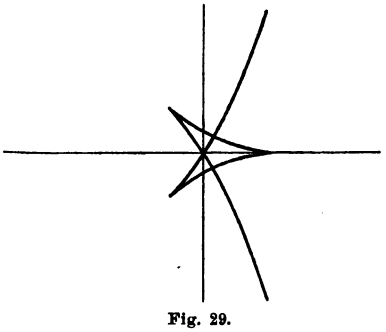
Fig. 29.

scissenaxe zusammenfallenden Tangenten in symmetrischer Weise, so erhält man die allgemeinere Kurve (Fig. 28)

$$x^5 = (y^2 - b^2x^2)(y^2 - c^2x^2)$$

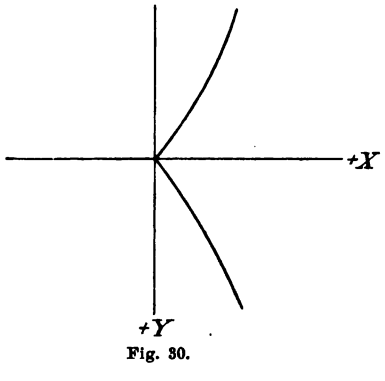

Fig. 30.

mit einem vierfachen Punkt im Ursprung; an Stelle der Schleifen können auch Spitzen treten, Fig. 29.

II. Die binomischen Hyperbeln

$$x^m \cdot y^n = C.$$

25. Hier können nur zwei Typen unterschieden werden, je nachdem m sowohl als n ungerade oder m gerade und n ungerade ist, also

a) Hyperbeln gerader Ordnung, deren einfachster Repräsentant ist: $xy = 1$ die konische Hyperbel,

b) Hyperbeln ungerader Ordnung, deren einfachster Repräsentant ist: $x^2y = 1$ die kubische Hyperbel.

Beide Arten von Hyperbeln haben die Koordinatenaxen zu Asymptoten. Bei

der ersten Art verlaufen die Äste auf entgegengesetzten Seiten beider Asymptoten ins Unendliche, die unendlich fernen Punkte sind daher entweder ge-

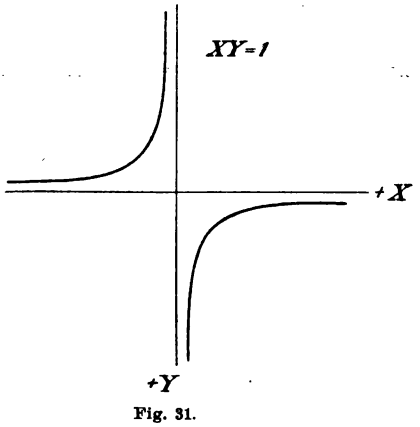

Fig. 31.

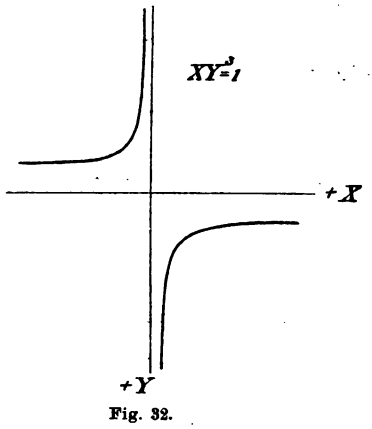

Fig. 32.

wöhnliche (Oval-) oder Flach- oder Spitzpunkte; bei der zweiten Art erstrecken sich die Zweige hinsichtlich der Abscissenaxe auf derselben Seite

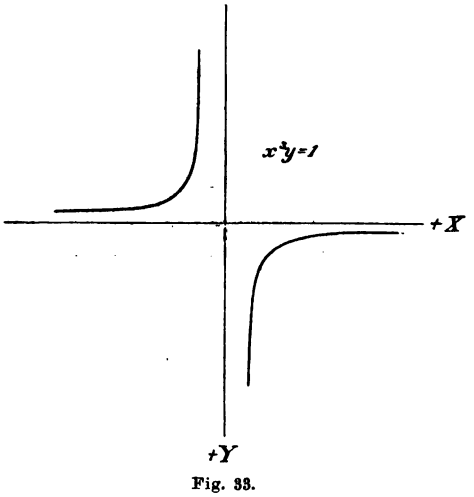

Fig. 33.

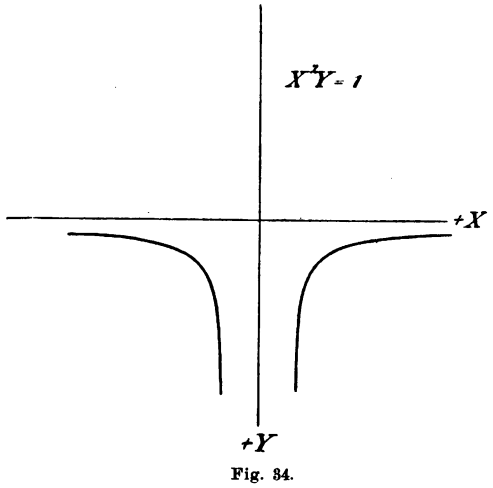

Fig. 34.

nach entgegengesetzten Richtungen, hinsichtlich der Ordinatenaxe auf verschiedenen Seiten nach derselben Richtung, der unendlich ferne Punkt der Abscissenaxe gehört somit zum Typus der Wendepunkte, derjenige der Ordinatenaxe zum Typus der Rückkehrpunkte. Ist $t = 0$ die unendlich ferne Gerade, so ist (vergl. hierzu die Untersuchungen über die parabolischen Punkte) für die

Hyperbeln gerader Ordnung:	homogen	der ∞ ferne Punkt der Ord.-Axe	Absc.-Axe
$xy=1$ konische Hyperbel	$xy=t^2\cdots$	$x=t^2$ Ovalpunkt	$y=t^2$ Ovalpunkt
$xy^3=1$ I. biquadratische Hyp.	$xy^3=t^4\cdots$	$x=t^4$ Flachpunkt	$y^3=t^4$ Spitzpunkt
$x^3y=1$ II. „ „	$x^3y=t^4\cdots$	$x^3=t^4$ Spitzpunkt	$y=t^4$ Flachpunkt

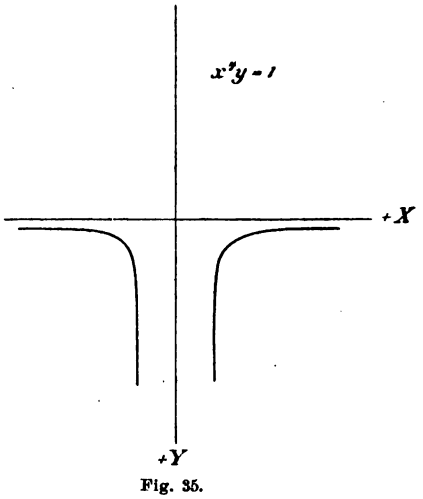

Fig. 35.

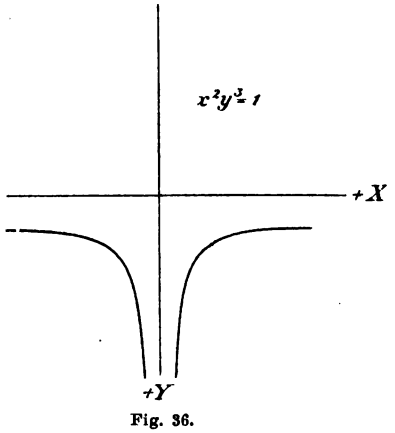

Fig. 36.

Hyperbeln ungerader Ordnung:	homogen	der ∞ ferne Punkt der Ord.-Axe.	Absc.-Axe
$x^2y=1$ kubische Hyperbel	$x^2y=t^3$	$x^2=t^3$ Rückkehrpunkt	$y=t^3$ Wendepunkt
$x^4y=1$ Hyperbel V. Ordnung I. Art	$x^4y=t^5$	$x^4=t^5$ Rückkehrspitzpunkt	$y=t^5$ Wendeflachpunkt
$x^2y^3=1$ „ „ „ II. „	$x^2y^5=t^5$	$x^2=t^5$ Rückkehrflachpunkt	$y^3=t^5$ Wendespitzpunkt

u. s. w.

Die elementarsymmetrischen Wurzelfunktionen.

26. Die Kenntnis der Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und ihren Wurzeln reicht auf François Viète zurück, der in seinem Werk: In artem analyticam, Isagoge 1591, allerdings unter der Voraussetzung nur positiver Wurzeln, die Koeffizienten der Gleichungen zweiten und dritten Grades durch die Wurzeln der Gleichungen darstellt. Die beiden Fundamentalsätze über die Anzahl der Wurzeln und deren Ab-

hängigkeit von den Koeffizienten spricht jedoch in ihrer Allgemeinheit erst Albert Girard aus: Er zeigt in seiner Invention nouvelle en l'algèbre, Amsterdam 1629, daſs, sofern man drei Arten von Lösungen, positive, negative und imaginäre, zuläſst, die Zahl der Wurzeln einer Gleichung gleich ihrem Grad ist und die mit abwechselnden Zeichen behafteten Koeffizienten der Gleichung die Summen der zu eins, zwei, drei u. s. f. kombinierten Wurzeln darstellen (XII déf. II. théor.). Descartes beweist sodann (Géométrie, livre IIIe), daſs, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung ist, diese sich durch $x - x_1$ teilen läſst; sind also $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades, so besteht die Identität

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n &\equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ &\equiv a_0x^n + (-1)^1 a_0 \Sigma x_1 \cdot x^{n-1} \\ &\quad + (-1)^2 a_0 \Sigma x_1x_2 \cdot x^{n-2} + (-1)^3 a_0 \Sigma x_1x_2x_3 \cdot x^{n-3} \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \cdot a_0 \cdot x_1x_2x_3\cdots x_n, \end{aligned}$$

woraus nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$a_1 = -a_0\Sigma x_1 \qquad a_2 = (-1)^2 \cdot a_0 \Sigma x_1x_2 \qquad a_3 = (-1)^3 a_0 \Sigma x_1x_2x_3$$
$$a_n = (-1)^n \cdot a_0 \cdot x_1x_2x_3\cdots x_n$$

und somit

$$\Sigma x_1 = (-1)^1 \cdot \frac{a_1}{a_0} \quad \Sigma x_1x_2 = (-1)^2 \cdot \frac{a_2}{a_0} \qquad \Sigma x_1x_2x_3 = (-1)^3 \cdot \frac{a_3}{a_0} \quad \text{u. s. w.}$$

$$x_1x_2x_3\cdots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}.$$

Unter diesen Beziehungen wird von De Gua insbesondere von derjenigen des öftern Gebrauch gemacht, daſs, absolut genommen, der durch den Koeffizienten der höchsten Potenz dividierte Koeffizient der zweithöchsten Potenz die Summe der Wurzeln und das durch denselben Koeffizienten dividierte Absolutglied das Produkt der Wurzeln darstellt.

III. Abschnitt.

Allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven nach dem Inhalt der „Usages de l'analyse" von De Gua.

Durchmesser und Mittelpunkte.

27. Im ersten Abschnitt der Usages de l'analyse behandelt De Gua erstmals die Mittelpunkte algebraischer Kurven. Bezüglich der Theorie der Durchmesser beschränkt er sich auf den Beweis des speziellen von Newton in der Enumeratio für die Kurven dritter Ordnung mit drei Asymptoten, die sog. Hyperbolae redundantes, aufgestellten Durchmessersatzes (vgl. 29).

A. Durchmesser.

28. Der in der Geometrie durch die Analysis des Descartes geschaffene Fortschritt lag vor allem in der Verallgemeinerung geometrischer Eigenschaften der Kegelschnitte für Kurven höherer Ordnung. Newton spricht in der Enumeratio, Sectio II, 1 erstmals einen derartigen, für sämtliche algebraischen Kurven giltigen Satz aus, der sich auf die Eigenschaften der Durchmesser bezieht und lautet

Allgemeiner Durchmessersatz von Newton: Bestimmt man auf jeder der Sehnen einer Parallelsehnenschar denjenigen Punkt, von dem aus gerechnet die Summen der bis zu den Durchschnittspunkten der Kurve reichenden Abschnitte beiderseits gleich sind, so liegen diese „Mitten" auf einer Geraden, dem der Parallelsehnenschar zugeordneten Durchmesser.

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft, dafs der Koeffizient der zweithöchsten Potenz einer algebraischen Gleichung, deren höchster Potenz man durch Division den Koeffizienten 1 gegeben hat, die Summe der Wurzeln

darstellt (vgl. 26). Die auf schiefwinklige Koordinaten bezogene Kurve n. Ordnung sei (Fig. 37)

$$(1) \qquad y^n - (ax+b)y^{n-1} + (cx^2+dx+e)y^{n-2} + \cdots = 0,$$

ist ferner auf irgend einer zur Ordinatenaxe parallelen Sehne RS die Mitte Q (x, q) so bestimmt, dafs die algebraische Summe der von Q einerseits und den Schnittpunkten mit der Kurve andererseits begrenzten Abschnitte $u_1, u_2, u_3, \cdots$ der Sehne RS verschwindet, so ist für jeden Schnittpunkt R dieser Sehne

$$(2) \qquad y = u + q$$

und somit gemäfs (1)

$$(u+q)^n - (ax+b)(u+q)^{n-1} + (cx^2+dx+e)(u+q)^{n-2} + \cdots = 0$$

oder

$$(3) \qquad u^n - (ax+b-nq)u^{n-1} + \cdots = 0.$$

Die Bestimmungsgleichung für q lautet somit

$$\Sigma u \equiv ax + b - nq = 0$$

woraus

$$(4) \quad q = \frac{ax+b}{n}.$$

Die Koordinaten aller Sehnenmitten sind daher $\left(x, \frac{ax+b}{n}\right)$. Betrachtet man somit als zweite Parallelsehne zu RS insbesondere die Ordinatenaxe selbst, so sind $\left(0, \frac{b}{n}\right)$ die Koordinaten

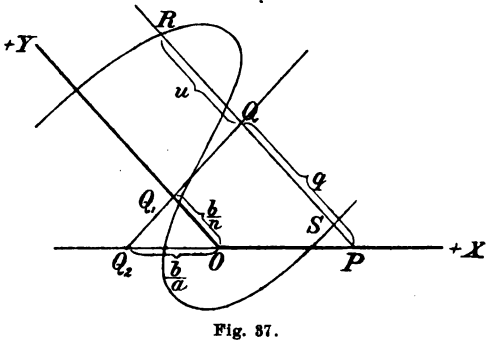

Fig. 37.

ihrer Sehnenmitte Q_1 und nimmt man als dritte Parallelsehne diejenige, für welche die Sehnenmitte Q_2 auf die Abscissenaxe zu liegen kommt, also die Koordinaten $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ besitzt, so folgt aus der Identität

$$(5) \qquad \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+x} \equiv \frac{\frac{b}{n}}{\frac{ax+b}{n}}$$

dafs

$$\frac{OQ_2}{PQ_2} = \frac{OQ_1}{PQ},$$

d. h. die drei Sehnenmitten Q, Q_1, Q_2 liegen auf einer Geraden, somit auch sämtliche Mitten der zur Ordinatenaxe parallelen Sehnenschar und da die

Kurve auf unendlich viele schiefwinklige Koordinatensysteme bezogen werden kann, so gilt der Satz für die Mitten jeder beliebigen Parallelsehnenschar. Zugleich ergiebt sich die Gleichung des Durchmessers als

$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{\frac{b}{n}} = 1$$

oder

$$y = \frac{ax + b}{n}. \tag{6}$$

29. Aufser diesem allgemeinen Satz spricht Newton in der Enumeratio, ebenfalls ohne Beweis, noch eine besondere Durchmessereigenschaft einer bestimmten Gruppe von Kurven dritter Ordnung aus, der sog. Hyperbolae redundantes, die drei Asymptoten, also eine mehr denn die Kegelschnittshyperbel, besitzen. Sie lautet: Zwei der drei Paare hyperbolischer Zweige einer Kurve dritter Ordnung können keine Durchmessser haben, ohne dafs nicht auch das dritte Paar einen solchen hat (vgl. 68, 69), m. a. W.

Satz: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendeasymptoten, so mufs sie noch eine dritte haben.

Erster Beweis von Stirling mittels Reihenentwicklung: Die Gleichung der Kurve dritter Ordnung mit drei hyperbolischen Zweigen lautet (vgl. 107)

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{1}$$

Die Ordinatenaxe $x = 0$ trifft die Kurve nur in einem endlichen Punkt $y = \frac{d}{e}$, die beiden anderen Schnittpunkte liegen im Unendlichen. Soll der endliche Schnittpunkt ebenfalls ins Unendliche fallen, also $y = \infty$ werden, so ist die Bedingung hiefür

$$e = 0. \tag{2}$$

Die Kurve verläuft alsdann nur auf einer Seite der Ordinatenaxe nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche, d. h. die Ordinatenaxe ist Wendeasymptote. Jede zu ihr parallele Sehne $x = \lambda$ trifft die Kurve nach Art der Kegelschnitte nur noch in zwei endlichen Punkten, für welche, da $e = 0$, die Summe der Ordinaten

$$y_1 + y_2 = 0$$

ist, d. h. unter der Bedingung (2) ist die Abscissenaxe Durchmesser für die zur Ordinatenaxe als Wendeasymptote parallele Sehnenschar.

Nach dem Newton'schen Parallelogramm ergeben sich für unendlich grofse Koordinaten aus dem Aggregat der Glieder höchster Ordnung

$$xy^2 - ax^3 = 0$$

die beiden Entwicklungen

(3) $$y = \pm\sqrt{a}\cdot x.$$

Entwickelt man nur die erste Reihe und setzt, um den zweiten Term zu finden

$$y = \sqrt{a}\cdot x + p,$$

so geht (1) über in

(4) $$2\sqrt{a}\cdot px^2 + p^2x + c\sqrt{a}\cdot x + ep = bx^2 + cx + d,$$

woraus nach dem Newton'schen Parallelogramm (an Stelle der Y-Axe daselbst eine P-Axe) für unendlich grofse Werte der Koordinaten die beiden Aggregate sich ergeben:

$$2\sqrt{a}\cdot px^2 + p^2x = 0 \quad \text{und} \quad 2\sqrt{a}\cdot px^2 - bx^2 = 0.$$

Aus dem ersten folgt

$$p = -2\sqrt{a}\cdot x,$$

also kein neuer Term, da für diesen Wert von p die erste Entwicklung in die zweite übergehen würde, aus dem zweiten dagegen ergiebt sich

(5) $$p = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Setzt man, um den nächsten Term zu finden

$$p = \frac{b}{2\sqrt{a}} + q,$$

so geht (4) über in

(6) $$2\sqrt{a}\cdot qx^2 + \frac{b^2}{4a}x + \frac{b}{a}qx + q^2x + e\sqrt{a}x + \frac{eb}{2\sqrt{a}} + eq = cx + d,$$

woraus nach dem Newton'schen Parallelogramm

(7) $$2\sqrt{a}\cdot qx^2 + q^2x = 0$$

oder

$$q = -2\sqrt{a}\cdot x,$$

also kein neuer Term, was vorauszusehen war, denn, da die Entwicklung gemäfs (5) nach fallenden Potenzen von x fortschreitet, so mufs für einen unendlich grofsen Wert von x der nach dem konstanten Glied $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ auftretende Term q unendlich klein werden, man hat daher zur Bestimmung von q überhaupt nicht das obige Aggregat (7), sondern dasjenige für unendlich grofse Werte von x und unendlich kleine Werte von q zu nehmen, nämlich

$$2\sqrt{a}\cdot qx^2 + \frac{b^2}{4a}x + e\sqrt{a}\cdot x - cx = 0$$

woraus

(8) $$q = \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Die Reihe lautet daher

(I) $$y = \sqrt{a}\cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x} + \cdots;$$

nimmt man $\sqrt{a}$ negativ, so erhält man die zweite Reihe

(II) $$y = -\sqrt{a}\cdot x - \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x} - \cdots.$$

Die beiden Entwicklungen (I) und (II) werden somit, da für die unendlich fernen Punkte aller hyperbolischen Zweige, die nicht den Enden der Axen zustreben, beide Koordinaten unendlich werden und für $x = \infty$ das dritte Glied beider Entwicklungen mit allen folgenden verschwindet, zu den Gleichungen zweier Asymptoten

(9) $$y = \sqrt{a}\cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{a}\cdot x - \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

deren Schnittpunkte mit der Kurve sich berechnen aus (1)

$$x\left(\sqrt{a}\cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + e\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

oder

$$0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + \left(\frac{b^2}{4a} + e\sqrt{a} - c\right)x = d - \frac{be}{2\sqrt{a}}$$

zu:

$$x_1 = \infty \quad x_2 = \infty \quad x_3 = \frac{4ad - be\sqrt{a}}{b^2 + 4ae\sqrt{a} - 4ac}$$

und

$$x_1' = \infty \quad x_2' = \infty \quad x_3' = \frac{4ad + be\sqrt{a}}{b^2 - 4ae\sqrt{a} - 4ac}.$$

Soll daher jede der beiden Asymptoten (9) Wendeasymptote werden, so mufs auf jeder derselben auch noch der dritte endliche Schnittpunkt ins Unendliche rücken, d. h.

(10) $$b^2 + 4ae\sqrt{a} - 4ac = 0,$$

(11) $$b^2 - 4ae\sqrt{a} - 4ac = 0.$$

Unter den Bedingungen (2), (10), (11) besitzt daher die Kurve (1) drei Wendeasymptoten; diese Bedingungen sind jedoch insofern nicht unabhängig von einander, als aus je zweien sich die dritte ergiebt, woraus folgt, dafs mit dem Bestehen zweier Wendeasymptoten auch die Existenz einer dritten verknüpft ist.

Zweiter Beweis von De Gua mittels Transformation:

Die Schlufsfolgerung, dafs für $c = 0$ die Ordinatenaxe Wendetangente

und die Abscissenaxe konjugierter Durchmesser ist, ist dieselbe. Um die Bedingungen für das Auftreten der den übrigen Asymptoten zugeordneten Durchmesser zu finden, bezieht man die geg. Kurve

$$(1) \qquad f(x, y) = xy^2 + ey - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$

mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

auf eine neue, in die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote gedrehten Ordinatenaxe, dann lautet die transformierte Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(z, u) = f(nu, mu) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 3ax^2 - 2bx - c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6ax - 2b \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -6a,$$

daher

$$(2a) \quad \varphi(z, u) = m^2 n \cdot u^3 + en \cdot u - an^3 \cdot u^3 - bn^2 \cdot u^2 - cn \cdot u - d$$
$$+ \frac{1}{1!}(m^2 \cdot u^2 - 3an^2 \cdot u^2 - 2bn \cdot u - c) z - \frac{1}{2}(6an \cdot u + 2b) z^2 - \frac{1}{6} \cdot 6az^3$$
$$= (m^2 n - an^3) u^3 + (m^2 z - 3an^2 z - bn^2) u^2$$
$$+ (-3anz^2 - 2bnz - cn + em) u - (az^3 + bz^2 + cz + d) = 0.$$

Da die Ordinatenaxe einer Asymptote parallel sein soll, so mufs sie die Kurve in mindestens einem unendlich fernen Punkt schneiden, hiefür ist die Bedingung

$$m^2 n - an^3 = 0,$$

woraus

$$n = 0 \qquad m = n\sqrt{a} \qquad m = -n\sqrt{a}$$

und somit die drei Asymptotenrichtungen, in welche die Ordinatenaxe gedreht werden kann, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{m}{n} = \infty \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m}{n} = \sqrt{a} \qquad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{m}{n} = -\sqrt{a}.$$

Der erste Fall führt wieder auf das ursprüngliche Koordinatensystem (1) und ergiebt die Y-Axe als Wendetangente unter der Bedingung $e = 0$; im zweiten bezw. dritten Fall wird die Gleichung der Kurve

$$(2b) \quad \psi(z, u) = (2az - b) n^2 u^2 + (-3az^2 - 2bz - c \pm e\sqrt{a}) nu$$
$$- (az^3 + bz^2 + cz + d).$$

Sollen nun die Ordinaten u einen zugeordneten Durchmesser haben, so darf nach Division mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz der Koeffizient der zweithöchsten Potenz in z nur linear sein, weil es möglich sein mufs, durch lineare Transformation (vgl. Allgemeiner Durchmessersatz 28) diesen Koeffi-

zienten zum Verschwinden zu bringen. Führt man diese Division durch, so kommt:

$$\begin{array}{l|l} 3az^2 + 2bz + c \pm e\sqrt{a} & 2az + b \\ \hline 3az^2 + \frac{3b}{2}z & \frac{3}{2}z + \frac{b}{4a} \\ \hline \frac{b}{2}z + c \pm e\sqrt{a} & \\ \frac{b}{2}z + \frac{b^2}{4a} & \\ \hline c - \frac{b^2}{4a} \pm e\sqrt{a}; & \end{array} \qquad (3)$$

es darf also, damit die entstehende Reihe (3) mit dem konstanten Glied abbricht, kein Rest übrig bleiben, d. h. die Bedingungen dafür, daſs die den Asymptotenrichtungen $\pm\sqrt{a}$ parallelen Sehnenscharen zugeordnete Durchmesser haben, sind dieselben wie bei Stirling, nämlich

$$c - \frac{b^2}{4a} \pm e\sqrt{a} = 0$$

oder

$$4ac - b^2 \pm e\sqrt{a} = 0$$

und stehen mit $e = 0$ in dem angegebenen Abhängigkeitsverhältnis.

Dritter Beweis: Das Aggregat der Glieder höchster Dimension von (1)

$$xy^2 - ax^3 = 0$$

giebt die drei Asymptotenrichtungen

$$x = 0 \qquad y - \sqrt{a}\cdot x = 0 \qquad y + \sqrt{a}\cdot x = 0.$$

Betrachtet man nur den zweiten Fall, so lautet die Gleichung der Asymptote

$$y = \sqrt{a}\cdot x + k,$$

wo k eine noch zu bestimmende Konstante ist, und die Schnittpunkte dieser Asymptote mit der geg. Kurve (1) ergeben sich aus

$$x\left(ax^2 + 2k\sqrt{a}\cdot x + k^2\right) + e\left(\sqrt{a}\cdot x + k\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

oder

$$(2) \qquad 0\cdot x^3 + \left(2k\sqrt{a} - b\right)x^2 + \left(k^2 + e\sqrt{a} - c\right)x + ek - d = 0.$$

Da die Asymptote die Kurve im Unendlichen berührt, so liegen zwei Schnittpunkte im Unendlichen, d. h. es müssen zwei Werte von x aus (2) unendlich werden; auſser dem Koeffizienten von x^3 verschwindet also auch derjenige von x^2, daher

$$(3) \qquad 2k\sqrt{a} - b = 0$$

und soll der unendlich ferne Berührungspunkt sogar Wendepunkt sein, so mufs auch noch der dritte Schnittpunkt ins Unendliche fallen, somit

$$k^2 + e\sqrt{a} - c = 0. \tag{4}$$

Aus (3) ergiebt sich die Konstante k und die Asymptote

$$y = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

ist somit Wendeasymptote unter der Bedingung des Verschwindens des k-Eliminats aus (3) und (4):

$$\frac{b^2}{4a} + e\sqrt{a} - c = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

B. Mittelpunkte.

30. Als Mittelpunkt einer Kurve definiert De Gua erstmals allgemein denjenigen Punkt, der sämtliche die Kurve schneidenden Strahlen seines Büschels, die sog. Durchmesser, so teilt, dafs die einzelnen von ihm aus bis zu den Schnittpunkten gemessenen Abschnitte jedes Durchmessers nach beiden Seiten hin gleich sind, dafs also in Bezug auf ihn sämtliche Kurvenschnittpunkte symmetrisch liegen.

Macht man den gesuchten Mittelpunkt (p, q) zum Nullpunkt des Koordinatensystems und nimmt man die neue Ordinatenaxe U drehbar, so lauten die Transformationsgleichungen (vgl. Fig. 1)

$$x = p + nu + z \qquad y = q + mu$$

und die Schnittpunkte der U-Axe mit der geg. Kurve

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

ergeben sich für $z = 0$ gemäfs Abschnitt (18) aus

$$\varphi(u) = f(p,q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}n + \frac{\partial f}{\partial y}m\right)u + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}nm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}m^2\right)u^2 + \cdots \tag{2}$$

wo an Stelle von x und y in den Differentialen die Werte p und q zu setzen sind. Soll nun die U-Axe Durchmesser sein, so mufs die Schnittpunktsgleichung, da alsdann die Schnittpunkte zum Mittelpunkte bezw. Ursprung paarweise symmetrisch liegen, die Form haben entweder

$$(u^2 - a)(u^2 - b)(u^2 - c)\cdots \equiv u^k + Au^{k-2} + Bu^{k-4} + \cdots\cdots + K = 0, \tag{3}$$

oder, wenn die Kurve durch den Ursprung selbst geht,

$$u(u^2 - a)(u^2 - b)(u^2 - c)\cdots \equiv u^\lambda + Au^{\lambda-2} + Bu^{\lambda-4} + \cdots\cdots + L \cdot u = 0, \tag{4}$$

wo k eine gerade, λ eine ungerade Zahl ist; hieraus folgt, wegen der Identität der Gleichungen (3) und (4) mit Gleichung (2), dafs für Kurven

gerader Ordnung alle ungeraden Differentiale, für Kurven ungerader Ordnung alle geraden Differentiale, im letzteren Falle einschliefslich der Kurvengleichung selbst, verschwinden müssen und zwar müssen, da die Schnittpunktsgleichung in u für alle beliebigen Durchmesser, also alle beliebigen m und n Geltung hat, jene Differentiale sogar identisch verschwinden, d. h. alle mit m und n behafteten Terme derselben m. a. W. sämtliche partielle Differentialquotienten jedes Differentials sind gleich Null zu setzen.

Bezeichnet man daher den gesuchten Mittelpunkt mit (x, y) statt mit (p, q), so bestimmt sich derselbe nebst den zugehörigen Bedingungen seiner Existenz, aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^3} = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} = 0, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0,$$

wenn die Kurve von gerader Ordnung ist und, wenn dieselbe von ungerader Ordnung ist, aus:

$$f(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0.$$

Beispiele.

31. *Erstes Beispiel: Der Kreis.* Da die Gleichung für den Kreis nur bis zum zweiten Grad ansteigt, so erhält man nur zwei Bestimmungsgleichungen für x und y, also keine Bedingung, d. h. der Kreis hat stets einen Mittelpunkt. Lautet die Kreisgleichung:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \tag{1}$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2a = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2b = 0, \tag{3}$$

somit aus (2) und (3) $x = a,\ y = b$

die Koordinaten des Mittelpunkts.

32. *Zweites Beispiel: Die Kegelschnitte.* Die allgemeine Gleichung derselben sei

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

dann ergeben sich die Koordinaten des Mittelpunkts aus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by + d = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy + e = 0,$$

zu

$$x = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2},$$

$$y = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2},$$

d. h. mit Ausnahme der Parabel, für welche $4ac - b^2 = 0$, der Mittelpunkt also ins Unendliche fällt, haben sämtliche Kegelschnitte einen endlichen Mittelpunkt.

33. *Drittes Beispiel: Die Kurven dritter Ordnung mit drei Paaren hyperbolischer Zweige.* Ihre Gleichung läfst sich durch bestimmte Annahme des Koordinatensystems (vgl. 107) auf die Form bringen:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

woraus

$$\frac{\partial x}{\partial f} = y^2 - 3ax^2 - 2bx - c,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - e,$$

so lauten die Bedingungsgleichungen für den Mittelpunkt:

(1) $$f(xy) = xy^2 + ey - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0,$$

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3ax + b = 0,$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y = 0,$$

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x = 0.$$

Die Werte (3) und (4) in (2) und (1) eingesetzt ergeben:

$$b = 0,\ d = 0,$$

als die beiden Bedingungen für die Existenz eines Mittelpunkts, der zugleich ein Punkt der Kurve und Ursprung des Koordinatensystems ist.

34. *Viertes Beispiel: Die Kassinoide.* Die Gleichung derselben lautet

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0,$$

somit sind die Bedingungsgleichungen für den Mittelpunkt

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + xy^2 - b^2x = 0,$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + y^3 + b^2y = 0,$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x = 0,$$

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} = y = 0,$$

(5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} = x = 0,$$

(6) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y = 0.$$

Aus sämtlichen sechs Gleichungen ergiebt sich $x = 0$, $y = 0$ ohne weitere Bedingung, d. h. die Kassinoide hat stets den Ursprung zum Mittelpunkt.

Asymptoten.

I. Asymptoten parallel den Axen.

35. Ordnet man die Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ nach Potenzen der einen Veränderlichen, etwa nach y, und fehlt hiebei das höchste Glied, hat also die Gleichung die Form

(1) $$f(x, y) = 0 \cdot y^n + (ax + b)y^{n-1} + (cx^2 + dx + e)y^{n-2} + \cdots = 0,$$

so ist jedenfalls eine Wurzel $y = \infty$, welches x man auch nehmen mag, d. h. die Kurve hat in der Richtung der Y-Axe einen hyperbolischen Punkt mit der Asymptote

(2) $$x = C,$$

wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist. Da diese Gerade die Kurve in zwei zusammenfallenden unendlich fernen Punkten schneidet, so mufs in der Schnittpunktsgleichung

(3) $$f(C, y) = 0 \cdot y^n + (aC + b)y^{n-1} + \cdots = 0,$$

auch noch der Koeffizient der zweithöchsten Potenz verschwinden, somit

$$aC + b = 0,$$

und daher gemäfs (2)

(2a) $$ax + b = 0,$$

die Gleichung der Asymptote. Setzt man diese Betrachtungen fort, so folgt (Usages pg. 34) der

Satz: Fehlen in der nach fallenden Potenzen von x bezw. y geordneten Kurvengleichung ein oder mehrere Anfangsglieder, so giebt der Koeffizient der ersten nicht verschwindenden Potenz von x bezw. y als Gleichung aufgefafst die zur Abscissen- bezw. Ordinatenaxe parallelen Asymptoten.

Im analytischen Dreieck ist diese Gleichung dargestellt durch eine zu den Banden parallele Bestimmungsgerade.

36. Im Anschlufs an obige Betrachtungen erwähnt De Gua die Möglichkeiten, dafs eine Wurzel $x = \alpha$ des gleich Null gesetzten Koeffizienten der ersten nicht verschwindenden Potenz von y zugleich eine Wurzel der Koeffizienten der nächst folgenden Potenzen ist, und untersucht hier zwei Fälle:

a) Diese Wurzel sei eine Wurzel sämtlicher folgender Koeffizienten einschliefslich des letzten Terms, dann erniedrigt sich nach Division mit $x - \alpha$ die Ordnung der Kurve um einen Grad, die Gerade $x - \alpha = 0$ bildet also einen Bestandteil der Kurve.

b) Diese Wurzel sei nur eine Wurzel des letzten Terms, dann zeigt sich, dafs nach Division der Gleichung mit $x - \alpha$ der letzte Term, der das Produkt sämtlicher Wurzeln y darstellt, endlich wird, obwohl doch für $x = \alpha$ eine dieser Wurzeln $y = \infty$ ist. Hieraus schliefst De Gua, dafs eine zweite Wurzel y unendlich klein werden mufs, d. h. dafs die Kurve die Abscissenaxe im Punkt $x = \alpha$ schneidet, eine Folgerung, die sich aus der Gestalt der Gleichung

$$(x - \alpha) y^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + k(x - \alpha)(x^{n-1} + \cdots + h) = 0,$$

die sich für $x - \alpha = 0$ reduziert auf

$$Ay^{n-2} + By^{n-3} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + Ly = 0,$$

unmittelbar ergiebt, da sich alsdann der Faktor $y = 0$ ausscheiden läfst (Usages pg. 37).

37. Ferner zieht De Gua unter der Voraussetzung, dafs der Grad der Variabeln des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der nach fallenden Potenzen der andern Variabeln geordneten Gleichung denjenigen der zugehörigen Potenz zum Grad der Gleichung ergänzt, dafs also dieser Koeffizient bis zum höchst möglichen Grad ansteigt, die Folgerung, dafs, wenn eine ungerade Anzahl der ersten Potenzen fehlt, die Kurve mindestens eine einer Koordinatenaxe parallele Asymptote besitzt, da in diesem Fall jener erste Koeffizient eine Gleichung ungeraden Grads liefert, also jedenfalls eine reelle Wurzel besitzt.

Je nachdem in diesen Koeffizienten selbst wieder Glieder fehlen, können weitere Besonderheiten eintreten. Beschränkt man die Betrachtungen zunächst auf die allgemeine Gleichung dritten Grads

$$a + by + cx + ey^2 + fxy + gx^2 + hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0,$$

in welcher, nach Potenzen von y geordnet, die höchste Potenz fehlen möge, so dafs die Gleichung lautet

$$(1) \qquad (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx + b)y + (lx^3 + gx^2 + cx + a) = 0,$$

so folgt

a) für $e = 0$ aus $ix + e = 0$ die Ordinatenaxe $x = 0$ als Asymptote,

b) für $e = 0$, $i = 0$, $b = 0$ aus $kx^2 + fx = x(kx + f) = 0$ wieder die Ordinatenaxe als Asymptote nebst der Parallelen $x = -\frac{f}{k}$; ist aufserdem noch $f = 0$, so ist die Ordinatenaxe doppelte Asymptote u. s. w.

c) für $i = 0$ aus dem ergänzten Koeffizienten $0 \cdot x + e = 0$ die unendlich ferne Gerade $x = \infty$ als Asymptote. Da für den Wert ∞ die niederen Potenzen von x gegen die höheren vernachlässigt werden dürfen, so berechnet sich das zugehörige unendliche y aus

$$ey^2 + kx^2y + lx^3 = 0,$$

zu

$$y = \frac{-kx^2 \pm \sqrt{k^2x^4 - 4elx^3}}{2e}\Bigg|^{x=\infty}$$

$$= \frac{-kx^2 - kx^2}{2e} = -\frac{k}{e}x^2\Bigg|^{x=\infty}$$

$$= \infty^2,$$

d. h. y wird von höherer Ordnung ∞ als x, die Kurve nähert sich also in der Richtung der Ordinatenaxe den beiden parabolischen Ästen

$$(2) \qquad y = -\frac{k}{e}x^2,$$

ein Ergebnis, das somit ohne Zuhilfenahme des algebraischen Dreiecks abgeleitet ist. Noch auf andere Weise gelangt De Gua zur selben Schlufsfolgerung. Da die Summe der Wurzeln

$$(3) \qquad y_1 + y_2 = -\frac{kx^2 + fx + b}{e}\Bigg|_{x=\infty} = \infty^2$$

so ist jedenfalls eine der beiden Wurzeln unendlich von der zweiten Ordnung; die zweite Wurzel, die sich aus

(4) $$y_1 \cdot y_2 = \frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e},$$

zu

(4a) $$y_2 = \frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e} \cdot \frac{1}{y_1}$$

berechnet, ist alsdann

entweder einfach unendlich	je nachdem	der ganze dritte Term,
oder endlich		oder lx^3
oder unendlich klein I. Ordnung		oder $lx^3 + gx^2$
oder unendlich klein II. Ordnung		oder $lx^3 + gx^2 + cx$

fehlt. Es wird also für $x = \infty$ keines der beiden y von höherem Grad ∞ als vom zweiten, gleichgiltig, ob die Koeffizienten f, b, l, g, c in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, und (3) geht für diese unendlich grofsen Werte der Koordinaten über in die Gleichung

(4) $$y = -\frac{k}{e} x^2,$$

welche die konisch parabolische Annäherung ausdrückt.

d) für $i = 0$, $k = 0$ wieder $x = \infty$ und die Summe der Wurzeln

$$y_1 + y_2 = -\frac{fx + b}{e}$$

unendlich, endlich oder null, je nachdem die Koeffizienten f und b in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, eine Möglichkeit, die nur bestehen kann, wenn beide Wurzeln y unendlich grofs werden mit entgegengesetztem Vorzeichen; dann ergiebt sich aus dem Produkt der Wurzeln

(4a) $$y_1 \cdot y_2 = \left.\frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e}\right|_{x=\infty}$$

dafs $$-y^2 = \infty^3 \quad \text{oder} \quad y^2 = -\infty^3$$

und dafs somit gemäfs (4a), gleichgiltig ob die Glieder mit f, b, g, c, a in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, die zweite kubische Parabel

(5) $$y^2 = -\frac{l}{e} x^3$$

die Annäherung in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe giebt.

In diesen Ausführungen zeigt De Gua seine Meisterschaft in der Analysis des Descartes, die ihm die Anwendung des algebraischen Dreiecks entbehrlich macht und zugleich einen tieferen Einblick in die Gründe für die sonst rein mechanische Handhabung desselben gewährt.

II. Asymptoten in beliebiger Richtung $\frac{m}{n}$.

38. Geht man mittels der Transformation (Fig. 38)

$$x = nu + z, \qquad y = mu$$

vom rechtwinkligen auf das schiefwinklige Koordinatensystem mit drehbarer U-Axe über und setzt $z = 0$, also

$$x = nu, \qquad y = mu,$$

wobei m und n durch die Beziehung

$$m^2 + n^2 = 1$$

verknüpft, sonst aber beliebig sind, so erhält man die Schnittpunkte der Kurve

(1) $f(x,y) = a + (by + cx) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + \cdots$

mit sämtlichen Strahlen durch den Ursprung aus der transformierten Gleichung

(2) $\varphi(u) = a + (bm + cn)u + (em^2 + fmn + gn^2)u^2$
$+ (hm^3 + im^2n + kmn^2 + ln^3)u^3 + \cdots$

Soll daher ein solcher Strahl durch den Ursprung die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen, d. h. einer Asymptote parallel sein, so mufs, damit eine Wurzel $u = \infty$ wird, der Koeffizient der höchsten Potenz von u in (2) verschwinden; dieser Koeffizient ist aber mit dem Aggregat der Glieder höchster Dimension der geg. Gleichung (1) identisch, wenn in (2) an Stelle von m und n die Werte y und x gesetzt werden, somit

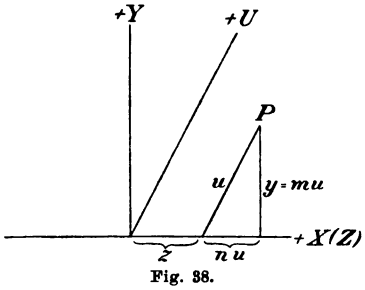

Fig. 38.

Satz: Das gleich Null gesetzte Aggregat der Glieder höchster Dimension einer Kurve $n$ter Ordnung giebt die n Asymptotenrichtungen $\frac{y}{x}$.

39. Die Lage der Asymptoten selbst bestimmt De Gua nicht; dagegen beschäftigt ihn die Untersuchung des von den Aggregaten der Glieder der höheren Dimensionen abhängigen Verhaltens der unendlich fernen Kurvenäste, wenn diese Aggregate als Gleichungen in $\frac{y}{x}$ aufgefafst, mehrfache und gemeinsame Wurzeln haben. Zu diesem Zweck transformiert er die allgemeine Gleichung

(I) $f(x,y) = f_r(x,y) + f_{r-1}(x,y) + f_{r-2}(x,y) + \cdots + f_1(x,y) + a = 0$

der vorliegenden Kurve, die von der $r$ten Ordnung sein möge (die Indices bezeichnen die Dimensionen der einzelnen Aggregate) so, dafs die Ursprungs-

gerade, die durch eine solche gemeinschaftliche bezw. mehrfache Wurzel $\frac{y}{x} = \alpha$ dargestellt ist, Ordinatenaxe $z = 0$ wird, führt aber die Transformation selbst nicht durch, sondern giebt nur die jeweilige Gestalt der transformierten Gleichung

$$(\text{II}) \quad \psi(z,u) = \psi_r(z,u) + \psi_{r-1}(z,u) + \psi_{r-2}(z,u) + \cdots + \psi_1(z,u) + a = 0$$

für die einzelnen Fälle an, was für die Beurteilung des Verlaufs der Kurve in den unendlich fernen Punkten der U-Axe, d. h. der Ursprungsgeraden $\frac{y}{x} = \alpha$ vollständig ausreicht. Man hat folgende drei Möglichkeiten:

A. Einfache gemeinschaftliche Wurzeln (Usages pg. 166).

40. Die einfachsten Fälle sind: Eine gemeinschaftliche Wurzel der Aggregate

a) $f_r(x,y) = 0$, $f_{r-1}(x,y) = 0$,

dann hat die transformierte Gleichung (II), wenn der Einfachheit halber alle Koeffizienten gleich 1 gesetzt werden, die Form

$$0 = (u^{r-1} \cdot z + u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a$$

und giebt für die gemeinschaftliche Wurzel $z = 0$ der beiden höchsten Aggregate eine Gleichung vom $(r-2)$ten Grad in u, also mit zwei Wurzeln $u = \infty$, die Ordinatenaxe ist somit selbst Asymptote, daher auf (I) übertragen.

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden höchsten Aggregate $f_r(x,y) = 0$ und $f_{r-1}(x,y) = 0$, so ist $\frac{y}{x} = \alpha$ die Gleichung der Asymptote selbst.

Zugleich ergiebt hiermit in Übereinstimmung das analytische Dreieck, auf die Bande ohne u gelegt, dafs die transformierte Gleichung (II) für sehr kleine Werte von z und sehr grofse von u sich reduziert auf

$$u^{r-1} \cdot z + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0,$$

d. h. dafs die unendlich fernen Äste der Kurve (I) sich nach Art der konischen Hyperbel der Asymptote nähern.

b) $f_r(x,y) = 0$, $f_{r-1}(x,y) = 0$, $f_{r-2}(x,y) = 0$,

dann erhält man aus (II), das für diesen Fall die Form hat

$$0 = (u^{r-1}z + \cdots + z^r) + (u^{r-2}z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + u^{r-4}z + \cdots + z^{r-3}) + \cdots + a,$$

für $z = 0$ eine Gleichung $(r-3)$ten Grads in u, also mit drei Wurzeln $u = \infty$ d. h. die Ordinatenaxe oder, auf (I) übertragen, die Ursprungs-

gerade $\frac{y}{x} = \alpha$ ist Wendeasymptote. Hiermit wieder in Übereinstimmung folgt nach dem analytischen Dreieck aus der reduzierten Gleichung (II)

$$u^{r-1}z + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 z + 1 = 0,$$

dafs die geg. Kurve sich ihrer Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ in derselben Weise nähert, wie es die kubische Hyperbel bezüglich ihrer Ordinatenaxe thut.

Setzt man diese Betrachtungen fort, so folgt der allgemeine

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine einfache gemeinschaftliche Wurzel einer geraden bezw. ungeraden Anzahl sich folgender höchster Aggregate, so ist $\frac{y}{x} = \alpha$ die Gleichung der Asymptote selbst und der unendlich ferne Punkt derselben verhält sich wie ein gewöhnlicher bezw. wie ein Wendepunkt, d. h. die Annäherung der Kurve an die Asymptote erfolgt nach Art der konischen bezw. kubischen Hyperbel.

B. Mehrfache Wurzeln.

41. Einfachste Fälle: Es habe

a) $f_r(x, y) = 0$ eine Doppelwurzel,

dann zeigt sich. wenn die transformierte Gleichung (II), die im vorliegenden Fall die Form hat

$$0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-1} + u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + \cdots + a$$

auf das analytische Dreieck gelegt wird, dafs bezüglich beider Bande keine untere Bestimmungsgerade auftritt, dafs somit für $u = \infty$ auch $z = \infty$ wird. Für diese beiden Extreme reduziert sich (II) auf

$$u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 + u = 0,$$

d. h. die geg. Kurve strebt dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\frac{y}{x} = \alpha$ nach Art der konischen Parabel zu.

b) $f_r(x, y) = 0$ eine dreifache Wurzel,

daher die transformierte Gleichung (II)

$$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-1} + \cdots + z^{r-1}) + \cdots + a$$

und somit die Näherungskurve

$$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^3 + u^2 = 0,$$

d. h. die geg. Kurve verläuft nach dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\frac{y}{x} = \alpha$ wie die unendlich fernen Äste der zweiten kubischen Parabel.

c) $f_r(x, y) = 0$ eine vierfache Wurzel

giebt als Näherungskurve die Spitzpunktsparabel

$$u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^4 + u^3 = 0.$$

d) $f_r(x, y) = 0$ eine fünffache Wurzel

giebt als Näherungskurve die Rückkehrspitzparabel

$$u^{r-5} \cdot z^5 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^5 + u^4 = 0 \text{ u. s. f.}$$

Man erhält somit in sämtlichen Fällen eine parabolische Annäherung, daher

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine mehrfache Wurzel des höchsten Aggregats, so hat die Kurve in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ stets einen parabolischen Verlauf und zwar nach Art der konischen bezw. zweiten kubischen Parabel, je nachdem α eine gerade bezw. ungerade mehrfache Wurzel ist.

C. Mehrfache gemeinschaftliche Wurzeln.

42. Die wichtigsten Fälle sind, dafs $\frac{y}{x} = \alpha$ als Wurzel auftritt bei:

a) $f_r(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a,$$

dann giebt das analytische Dreieck, auf die Bande ohne u gelegt, die zu dieser parallele Bestimmungsgerade

$$(III) \qquad 0 = u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-2} \cdot z + u^{r-2} \quad \text{oder} \quad z^2 + z + 1 = 0,$$

d. h. zwei zur Ordinatenaxe $z = 0$, also zur Ursprungsgeraden $\frac{y}{x} = \alpha$ parallele Asymptoten, die wegen des konstanten Glieds in (III) nicht durch den Ursprung gehen, obwohl α eine Wurzel der beiden höchsten Aggregate ist (vgl. 40). Je nach der Beschaffenheit der beiden, von den in (III) nicht geschriebenen Koeffizienten (vgl. 40) abhängigen Wurzeln sind diese Asymptoten reell und getrennt, reell und zusammenfallend oder imaginär konjugiert (vgl. 45, c. Fig. 43 und 44).

b) $f_r(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \quad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

$$(IIa) \quad 0 = (z^2 + z)\, u^{r-2} + (z^3 + z^2 + z + 1)\, u^{r-3} + \cdots + a,$$

d. h. gemäfs (35) zwei parallele Asymptoten: $z^2 + z = 0$, die eine $z = 0$ oder $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung. Ihr nähert sich die Kurve gemäfs dem analytischen Dreieck nach Art der konischen Hyperbel

$$(III) \qquad u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

c) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \quad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

$$(IIa) \quad 0 = z^2 \cdot u^{r-2} + (z^3 + z^2 + z + 1)\, u^{r-3} + \cdots\cdots + a,$$

d. h. eine doppelt zu zählende Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung und asymptotische Annäherung der Kurve an dieselbe in der Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die kubische Hyperbel

(III) $$u^{r-2}z^2 + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0.$$

d) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

(II) $$0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdots z^{r-3}) + (u^{r-4} + \cdots + z^{r-4}) + \cdots$$

woraus für $z = 0$ eine Gleichung $(r-4)$ten Grads in u, also vier Wurzeln $u = \infty$ und somit $\frac{y}{x} = \alpha$ selbst Asymptote mit der Annäherung

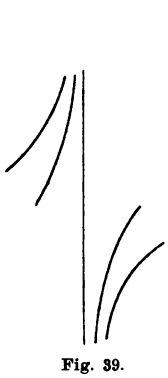
Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

(III) $$u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$u^2z^2 + uz + 1 = 0$$

oder

$$(uz + C_1)(uz + C_2) = 0$$

d. h. nach Art der konischen Hyperbel mit Doppelästen, die durch die Asymptote nicht getrennt oder getrennt sind (Fig. 39 und 40), je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben; sind C_1 und C_2 imaginär konjugiert, so ist die Asymptote von keinem Zweige begleitet.

e) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdots + z^{r-3}) + (u^{r-5} \cdot z + \cdots + z^{r-4}) + (u^{r-5} + \cdots + z^{r-5}) + \cdots$$

somit Annäherung an die Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ sowohl (Fig. 41) nach Art der konischen Hyperbel

(III) $$u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0,$$

als kubischen Hyperbel

$$u^{r-5} \cdot + u^{r-3} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad u^2z + 1 = 0.$$

f) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die Kurve erstreckt sich in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ nach Art der konischen Parabel

$$u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} \cdot z^3 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0.$$

g) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-4} \cdot z^4 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ zwei unendlich ferne Zweige wie die zweite kubische Parabel

$$(III) \qquad u^{r-2} \cdot z + u^{r-4} \cdot z^4 = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 + z^3 = 0.$$

h) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-5} \cdot z^5 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ zwei unendlich ferne Zweige wie die Spitzpunktsparabel

$$(III) \qquad u^{r-2} \cdot z + u^{r-5} \cdot z^5 = 0 \quad \text{oder} \quad u^3 + z^4 = 0.$$

i) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Erste kubische Parabel

$$(III) \qquad u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

k) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

$$(II) \qquad 0 = (u^{r-4} \cdot z^4 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a,$$

$$(III) \qquad u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-2} = 0$$

oder

$$z^4 + uz^2 + u^2 = 0$$

oder

$$(z^2 + C_1 \cdot u)(z^2 + C_2 \cdot u) = 0.$$

Je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, besitzt die Kurve in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ vier Äste nach Art zweier konischer Parabeln, die sich in ihren Scheiteln entweder von innen oder von aufsen berühren.

l) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

(II) $$0 = (u^{r-5} \cdot z^5 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die unendlich fernen Äste der Kurve verlaufen in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ wie diejenigen der zweiten kubischen Parabel

(III) $$u^{r-5} \cdot z^5 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 + z^3 = 0$$

und konischen Parabel

$$u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0.$$

m) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

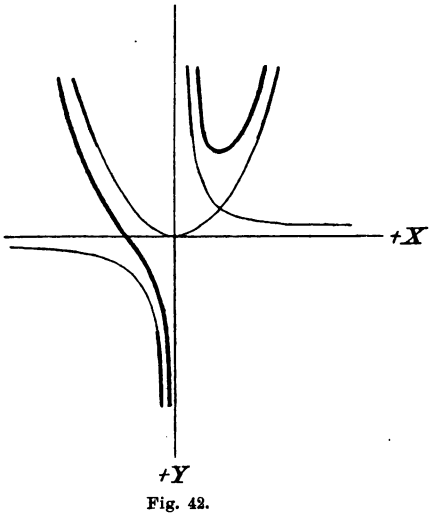

Fig. 42.

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

(III) Konische Hyperbel

$$u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$uz + 1 = 0$$

und konische Parabel

$$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-2} \cdot z = 0$$

oder

$$u + z^2 = 0.$$

Diesen Verlauf der unendlich fernen Zweige besitzt z. B. die Parabel des Descartes (Fig. 42).

n) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Die Kurve besitzt somit einen unendlich fernen dreifachen Punkt mit drei zur Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parallelen Asymptoten, von denen keine durch den Ursprung geht.

o) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

$f_{r-2}(x, y) = 0$ und $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + . + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdots + z^{r-3}) + u^{r-4} + \cdots$$

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder $$z(z^2 + z + 1) = 0.$$

Die Kurve besitzt drei zur Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parallele Asymptoten, davon die eine durch den Ursprung.

p) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ und $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Drei parallele Asymptoten:

(IIIa) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder

$$z(z^2 + z + 1) = 0,$$

davon die eine durch den Ursprung mit Annäherung der Kurve nach Art der konischen Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-4} \cdot z + u^{r-5} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

q) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten:

(IIIa) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0$$

oder

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung doppelt zu rechnen mit Annäherung nach Art der kubischen Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0.$$

r) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ und $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten

(IIIa) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0$$

oder.

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung doppelt zu rechnen mit der Annäherung

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-5} = 0$$

oder

$$u^2 \cdot z^2 + uz + 1 = 0$$

oder

$$(uz + C_1)(uz + C_2) = 0,$$

d. h. nach Art zweier in denselben oder in verschiedenen Quadranten verlaufenden konischen Hyperbeln, je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben und ohne Begleitung von Zweigen, wenn C_1 und C_2 imaginär konjugiert sind.

s) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-4} \cdot z^3 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Erste kubische Parabel

(III) $$u^{r-2} + u^{r-3} \cdot z^3 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

t) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach.

Drei parallele Asymptoten

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

davon keine durch den Ursprung.

u) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,
$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten

(IIIa) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine doppelt zu zählende durch den Ursprung mit Annäherung der Kurve nach Art der konischen Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

v) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve nähert sich der Asymptote durch den Ursprung in der Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die II. biquadratische Hyperbel

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^3 + 1 = 0.$$

w) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-3}(x, y) = 0$, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Die Annäherung an die Asymptote durch den Ursprung erfolgt in derselben Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die konische Hyperbel

(IIIa) $$u^{r-5} + u^{r-4} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0$$

und die kubische Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0$$

x) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ doppelt.

II. biquadratische Hyperbel

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^3 + 1 = 0.$$

y) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Hyperbel V. Ordnung II. Art

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-5} = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 z^3 + 1 = 0.$$

z) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ einen vierfachen Punkt mit vier parallelen Asymptoten:

(III) $$u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z^2 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

von welchen keine durch den Ursprung geht.

zz) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve besitzt drei parallele Asymptoten, davon keine durch den Ursprung, mit hyperbolischen Ästen:

(IIIa) $$u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z^2 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

nebst zwei in derselben Richtung sich erstreckenden parabolischen Zweigen: konische Parabel

(IIIb) $$u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-5} \cdot z^5 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0$$

u. s. f.

43. In diesen Einzeluntersuchungen findet De Gua die Bestätigung des allgemeinen, von ihm aufgestellten und bewiesenen Satzes, dafs in Bezug auf die Lage der Äste zur Asymptote, also abgesehen vom Grad der Krümmung, sämtliche algebraische Kurven nur auf sechs verschiedene Arten (eine Zahl, die wegen der Schnabelspitze auf acht zu erhöhen ist) den unendlich fernen Punkten zustreben. Nach ihm reduziert sich die Gleichung jeder algebraischen Kurve für die Annäherung an die unendlich fernen Punkte stets auf ein Binom

(1) $$y^m = Ax^{\pm n},$$

eine Annahme, womit De Gua denselben Fehler begeht wie bei den Singularitäten im Ursprung (vgl. 6) und infolge deren er die parabolische und hyperbolische Spitze II. Art übersieht; die Betrachtung von (1) ergiebt ihm sowohl für positive n als für negative d. h. für parabolische Zweige sowohl wie für hyperbolische, je drei Fälle, je nachdem m und n gerade oder ungerade Zahlen sind (falls m und n Bruchpotenzen wären, sind durch Potenzieren von (1) ganze Zahlen herzustellen), nämlich:

Der Verlauf der unendlich fernen Kurvenzweige erfolgt im Falle

a) m und n positiv		nach Art der
für m ungerade,	n ungerade	I. kubischen Parabel
m gerade,	n ungerade	II. kubischen Parabel
m ungerade,	n gerade	konischen Parabel.
b) m positiv, n negativ		
für m ungerade,	n ungerade	konischen Hyperbel
m gerade,	n ungerade	kubischen Hyperbel (Wendepunkt)
m ungerade,	n gerade	kubischen Hyperbel (Rückkehrpunkt).

Der Fall: m sowohl als n gerade, reduziert sich durch Wurzelziehen auf einen der übrigen sechs Fälle.

Die Asymptotenschnittpunktsgleichung.

44. Führt man wegen der Bedeutung der transformierten Gleichung

$$\psi(z, u) = 0, \tag{II}$$

aus deren Gestalt allein (vgl. 39) De Gua seine interessanten Ergebnisse über die unendlich fernen Punkte ableitet, die Transformation der Gleichung der vorliegenden Kurve $r$ter Ordnung

$$f(x, y) = 0 \tag{I}$$

wirklich durch und zwar, der Analogie mit den übrigen Aggregaten wegen, nur an demjenigen der Glieder höchster Dimension, schreibt man also

$$\begin{aligned} f_r(x, y) &= ax^r + bx^{r-1} \cdot y + cx^{r-2} \cdot y^2 + \cdots\cdots + ky^r \\ &= \left(a + b \cdot \frac{y}{x} + c \cdot \frac{y^2}{x^2} + \cdots\cdots\cdots + k \cdot \frac{y^r}{x^r}\right) x^r, \end{aligned} \tag{3}$$

so ist, wenn $\frac{y}{x} = \alpha$ eine Wurzel dieses Aggregats ist, $\frac{y}{x} - \alpha$ ein Faktor desselben, soll also $\frac{y}{x}$ selbst Faktor werden, entsprechend dem Verlangen, dafs in der transformierten Gleichung (II) $z = 0$ gemeinschaftlicher oder mehrfacher Faktor der höchsten Aggregate wird, so sind die Wurzeln von (3) um α zu vergröfsern; man hat also in (3) zu setzen

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} + \alpha = \frac{\alpha x' + y'}{x'}, \tag{4}$$

d. h. an Stelle von y und x die Werte $\alpha x' + y'$ und x', womit (3) übergeht in

$$\begin{aligned} f_r(x', y') &= \left(a + b \cdot \frac{\alpha x' + y'}{x'} + c \cdot \frac{(\alpha x' + y')^2}{x'^2} + \cdots + k \cdot \frac{(\alpha x' + y')^r}{x'^r}\right) x'^r \\ &= a x'^r + b x'^{r-1}(\alpha x' + y') + c x'^{r-2}(\alpha x' + y')^2 + \cdots + k(\alpha x' + y')^r \\ &= \psi_r(z, u), \end{aligned} \tag{IIa}$$

wenn statt y' und x' die Koordinaten z und u geschrieben werden. Die Aggregate (IIa) erhält man aber auch, wenn in der geg. Gleichung (I) an Stelle von y und x die Werte $\alpha x' + y'$ und x' gesetzt werden, und ersetzt man diese Werte selbst wieder durch $\alpha x + C$ und x, so folgt

$$\psi(z, u) \equiv f(x, \alpha x + C), \tag{III}$$

sobald für C und x die Koordinaten z und u eintreten. Nun ist aber

$$f(x, \alpha x + C) = 0 \tag{IV}$$

nichts anderes denn die Gleichung der Schnittpunkte der Kurve (I) mit der zur Richtung α parallelen Asymptote

$$y = \alpha x + C, \tag{5}$$

daher

Satz: Die transformierte Gleichuug $\psi(z, u) = 0$ ist identisch mit der Asymptotenschnittpunktsgleichung.

Auf Grund dieses Satzes ist es sehr einfach, die von De Gua nur der Gestalt nach gegebenen Gleichung $\psi(z, u) = 0$ auch in ihren Koeffizienten zu berechnen. Entwickelt man zu diesem Zweck jedes der Aggregate der Asymptotenschnittpunktsgleichung (IV)

$$f(x, \alpha x + C) = f_r(x, \alpha x + C) + f_{r-1}(x, \alpha x + C) + \cdots + f_1(x, \alpha x + C) + a$$

nach dem Taylorschen Satz, so folgt

$$\begin{aligned} f(x, \alpha x + C) = {} & f_r(x, \alpha x) + \frac{C}{1!}\frac{\partial f_r}{\partial y} + \frac{C^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f_r}{\partial y^2} + \cdots \\ & + f_{r-1}(x, \alpha x) + \frac{C}{1!} \cdot \frac{\partial f_{r-1}}{\partial y} + \frac{C^2}{2!}\frac{\partial^2 f_{r-1}}{\partial y^2} + \cdots \\ & + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{IVa}$$

und schreibt man gemäfs (3)

$$f_r(x, \alpha x) = x^r \cdot f_r(\alpha) \qquad f_{r-1}(x, \alpha x) = x^{r-1} \cdot f_{r-1}(\alpha) \text{ u. s. w.}$$

$$\left.\frac{\partial f_r(x, y)}{\partial y}\right| = x^{r-1} \cdot f_r(\alpha) \qquad \left.\frac{\partial^2 f_r(x, y)}{\partial y^2}\right| = x^{r-2} \cdot f_r''(\alpha) \text{ u. s. w.}$$

$$y = \alpha x \qquad y = \alpha x,$$

ordnet ferner die Koeffizienten der Potenzen von x in Vertikalkolonnen, so nimmt (IVa) die Form an

(V)
$$f(x, \alpha x + C)$$
$$= f_r(\alpha) \cdot x^r + \frac{C}{1!} f_r'(\alpha) \Big| x^{r-1} + \frac{C^2}{2!} f_r''(\alpha) \Big| x^{r-2} + \frac{C^3}{3!} f_r'''(\alpha) \Big| x^{r-3} + \cdots$$
$$+ f_{r-1}(\alpha) \Big| + \frac{C}{1!} f_{r-1}'(\alpha) \Big| + \frac{C^2}{2!} f_{r-1}''(\alpha) \Big| = F(C, x)$$
$$+ f_{r-2}(\alpha) \Big| + \frac{C}{1!} f_{r-2}'(\alpha) \Big|$$
$$+ f_{r-3}(\alpha) \Big|$$

identisch mit der nach Potenzen von u geordneten Gleichung $\psi(z, u) = 0$, wenn an Stelle von C und x die Buchstaben z und u geschrieben werden. Diese Gleichung hat den Vorteil, dafs sie nicht blofs wie (II) die Art des unendlich fernen Punkts, sondern die von der Konstanten C abhängige Asymptote desselben selbst zu ermitteln gestattet, wie folgt:

Der Voraussetzung gemäfs ist $f_r(\alpha) = 0$, d. h. eine Wurzel $x = \infty$, soll also ein weiterer Schnittpunkt der Geraden (5) mit der Kurve ins Unendliche rücken, so mufs auch der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von x verschwinden, d. h.

$$\frac{C}{1!} f_r'(\alpha) + f_{r-1}(\alpha) = 0 \cdots$$

woraus

(6)
$$C = -\frac{f_{r-1}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}$$

und somit die Gleichung der Asymptote

(7)
$$y = \alpha x - \frac{f_{r-1}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}.$$

Nachweis der Identität von $\psi(z, u) = 0$ mit $F(C, x) = 0$ an einzelnen Beispielen.

45. Es sei

a) $f_r(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, haben also die beiden höchsten Aggregate von (I) eine gemeinschaftliche Wurzel, so zeigt sich dies in Übereinstimmung mit der Form der transformierten Gleichung $\psi(z, u) = 0$ vgl. 40. A, a darin, dafs sich aus den beiden höchsten Horizontalreihen von (V), welche die beiden höchsten Aggregate der nach beiden Variabeln C und x geordneten Asymptotenschnittpunktsgleichung darstellen, C als Faktor ausscheidet; zugleich folgt aus (6)

$$C = 0,$$

d. h. $y = \alpha x$ ist die Asymptote selbst.

b) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Doppelwurzel des höchsten Aggregats (vgl. 17), so folgt aus (6)

$$C = \infty,$$

somit die Gleichung der Asymptote $y = \alpha x + \infty$, d. h. die unendlich ferne Gerade ist Asymptote oder die Kurve verläuft in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parabolisch (vgl. 41. B, a).

c) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, d. h. die Doppelwurzel des höchsten Aggregats ist zugleich einfache Wurzel des zweithöchsten, dann verschwinden in (V) die Koeffizienten von x^r und x^{r-1}, es liegen somit zwei Schnittpunkte der Geraden im Unendlichen, aber da gemäfs (6)

$$C = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt, so schneidet jede Gerade in der Richtung α die Kurve in zwei unendlich fernen Punkten. Die Kurve besitzt also in dieser Richtung einen unendlich fernen Doppelpunkt, dessen Asymptoten sich aus der Bedingung bestimmen, dafs sie die Kurve in drei unendlich fernen Punkten schneiden, es verschwindet daher in diesem Fall auch der Koeffizient von x^{r-2}, d. h.

$$\frac{C^2}{2!} f_r''(\alpha) + \frac{C}{1!} f'_{r-1}(\alpha) + f_{r-2}(\alpha) = 0, \tag{8}$$

woraus zwei Werte C_1 und C_2 sich ergeben, mit welchen die Gleichungen der beiden parallelen Asymptoten des unendlich fernen Doppelpunkts lauten

$$y = \alpha x + C_1 \quad \text{und} \quad y = \alpha x + C_2. \tag{9}$$

Je nachdem die Diskriminante der Gleichung (8)

$$2 f_r''(\alpha) \cdot f_{r-2}(\alpha) - f'^2_{r-1}(\alpha) \gtreqless 0,$$

ist der unendlich ferne Doppelpunkt ein gewöhnlicher mit zwei getrennten Asymptoten (Fig. 43) oder ein Rückkehrpunkt mit zwei zusammenfallenden Asymptoten (Fig. 44) oder ein isolierter Punkt ohne reelle Zweige (vgl. 42. C, a).

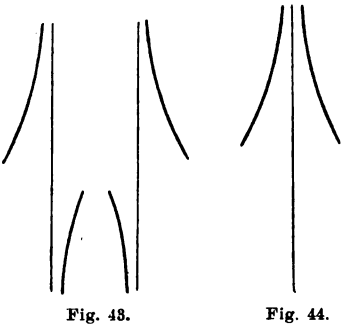

Fig. 43. Fig. 44.

d) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, $f_r''(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, d. h. eine dreifache Wurzel des höchsten Aggregats zugleich einfache Wurzel des zweithöchsten, dann verschwinden in (V) wieder die Koeffizienten von x^r und x^{r-1}, die Kurve besitzt somit wieder einen unendlich fernen Doppelpunkt, für welchen gemäfs (8)

$$C_1 = \infty \qquad C_2 = -\frac{f_{r-2}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}.$$

Es ist also nur die eine der beiden Asymptoten endlich, die andere Asymptote ist die unendlich ferne Gerade, m. a. W. die Kurve nähert sich der endlichen Asymptote

$$y = \alpha x - \frac{f_{r-2}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}$$

nach Art der konischen Hyperbel und erstreckt sich mit zwei anderen konisch parabolischen Ästen in einer der beiden Richtungen dieser Asymptote (vgl. die Parabel des Descartes; 42. C, m).

Die Regel von De Gua.

46. Während sich die Konstanten C auch in solchen Füllen, wo der Wurzelwert α einer gröfseren Anzahl von Bedingungen unterliegt, aus (V) verhältnismäfsig leicht ermitteln lassen, so ist mit der Kenntnis der Lage der Asymptote und ihrer Schnittpunkte, insbesondere wenn sie ins Unendliche rückt, doch die Art der Annäherung der Kurve noch nicht so einfach zu beurteilen, auch giebt hierüber im allgemeinen die auf das analytische Dreieck gelegte Kurvengleichung (I) keinen Aufschlufs. Um über diese Annäherung einen sofortigen und sicheren Entscheid zu treffen, bleibt nur das

Verfahren von De Gua:

Bestimmt man für jeden der Wurzelwerte $\frac{y}{x} = \alpha$ des höchsten Aggregats der nach beiden Variabeln geordneten Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ die Asymptotenschnittpunktsgleichung $F(C, x) = 0$ und legt sie auf das analytische Dreieck, indem man C und x als Variable betrachtet, so geben die oberen Bestimmungsgeraden dieser Gleichung das Verhalten der Kurve in den betreffenden unendlich fernen Punkten, hierbei ist die jeweilige Asymptote als neue X-Axe zu betrachten.

Die singulären Punkte in analytischer Behandlung.

A. Singuläre Punkte auf den Koordinatenaxen.

47. Ordnet man die Gleichung der geg. Kurve $n$ter Ordnung nach fallenden Potenzen der einen Variabeln und schreibt

$$\text{(I)} \quad f(x, y) = Ay^n + (ax + b)\,y^{n-1} + (cx^2 + dx + e)\,y^{n-2} + \cdots + (Bx^n + kx^{n-1} + \cdots + rx + s) = 0,$$

$$= Ay^n + f_1(x)\,y^{n-1} + f_2(x)\,y^{n-2} + \cdots + f_n(x),$$

so giebt $y = 0$ die Entfernungen der n Kurvenschnittpunkte auf der X-Axe vom Ursprung als Wurzeln der Gleichung

$$f_n(x) = 0. \tag{1}$$

Je nachdem mehrere dieser Wurzeln gleich sind oder zugleich als Wurzeln der vorhergehenden Koeffizienten $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ u. s. f. von y auftreten, zeigt die Kurve in den betreffenden Schnittpunkten ein besonderes Verhalten. Die einfachsten Möglichkeiten sind, dafs eine solche Wurzel $x = \alpha$ auftritt bei

a) $f_n(x) = 0$ doppelt	dann ist die Abscissenaxe im Schnittpunkt	gewöhnliche Tangente
b) $f_n(x) = 0$ dreifach		Wendetangente (inflexion)
c) $f_n(x) = 0$ vierfach		Flachpunktstangente (serpentement infiniment petit)
d) $f_n(x) = 0$ fünffach		Wendeflachpunktstangente (serpentement affecté d'inflexion).

Die Kurve berührt somit die Abscissenaxe, abgesehen vom Grad der Krümmung, im Fall einer mehrfachen Wurzel von gerader bezw. ungerader Ordnung nach Art der konischen bezw. ersten kubischen Parabel.

e) $f_n(x) = 0$, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

dann hat für $x = \alpha$ Gleichung (I) die Form

$$Ay^n + f_1(\alpha)\, y^{n-1} + f_2(\alpha)\, y^{n-2} + \cdots + f_{n-2}(\alpha)\, y^2 = 0,$$

woraus sich ergiebt $y^2 = 0$; man erhält somit für einen Wert $x = \alpha$ zwei Werte $y = 0$, d. h. die Ordinate des Abscissenschnittpunkts ist Tangente in diesem Punkt.

f) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

dann ergeben sich für zwei Werte $x = \alpha$ auch zwei Werte $y = 0$, d. h. die Abscissenaxe sowohl wie die Ordinate des Kurvenschnittpunkts $(\alpha, 0)$ treffen die Kurve zweimal in diesem Punkt, letzterer ist also ein Doppelpunkt.

g) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

giebt Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Tangente.

h) $f_n(x) = 0$ vierfach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Wendetangente.

i) $f_n(x) = 0$ fünffach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Flachpunktstangente.

k) $f_n(x) = 0$ sechsfach. $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Wendeflachpunktstangente.

l) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach oder mehrfach: Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit zugehöriger Ordinate als Tangente, da für $x = \alpha$ drei Werte $y = 0$ sich ergeben.

m) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$, $f_{n-3}(x) = 0$ einfach bezw. mehrfach:

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit zugehöriger Ordinate als Wendetangente.

n) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach oder mehrfach: entweder dreifacher Punkt auf der Abscissenaxe oder Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit dieser sowie seiner zugehörigen Ordinate als Tangenten.

48. Diese Ergebnisse verwendet De Gua, um umgekehrt die Bedingungen für die Existenz der eben aufgefundenen ausgezeichneten Punkte der Abscissenaxe aufzustellen. Soll z. B. die geg. Kurve auf der Abscissenaxe einen Doppelpunkt besitzen, so mufs $f_n(x) = 0$ eine Doppelwurzel haben, die zugleich einfache Wurzel von $f_{n-1}(x) = 0$ ist, es bestehen somit in diesem Fall die Gleichungen (vgl. 17)

$$f_n(x) = 0, \qquad f_n'(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0,$$

woraus sich entweder mittels der Newtonschen Formeln (vgl. 13) oder nach dem Kettenbruchverfahren von De Gua (vgl. 16) zwei Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Gleichung (I) ergeben.

Newtonscher Sekantensatz.

49. Im Anschlufs an die vorhergehenden Betrachtungen zeigt De Gua die geometrische Bedeutung des letzten Terms $f_n(x) = 0$ der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung (I), vgl. 47. Sind α_1, α_2, $\alpha_3 \cdots \alpha_n$ die Wurzeln dieses Terms, ist also

$$f_n(x) = B(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n),$$

so ergiebt sich, da für jedes beliebige, fest angenommene x dieser alsdann konstante Term mit dem Koeffizienten A von y^n dividiert das Produkt der n Wurzeln y der Gleichung (I), absolut genommen, darstellt, aus

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n = \frac{B}{A}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$$

das Verhältnis

$$\frac{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)} = \frac{B}{A}$$

als konstant, eine Eigenschaft, die Newton in der *Enumeratio* als dritte allgemeine Eigenschaft aller algebraischen Kurven aufzählt und die in Worten lautet:

Satz: Zieht man durch irgend einen Punkt der Ebene einer algebraischen Kurve zwei Parallelen zu den Axen so, dafs jede derselben die Kurve in ebensoviel endlichen Punkten schneidet als der Grad der Gleichung angiebt, so stehen die Produkte der von jenem Punkt aus bis zu den Kurvenschnittpunkten gemessenen Abschnitte beider Geraden in einem konstanten Verhältnis, nämlich im Verhältnis der beiden Koeffizienten der höchsten Potenzen beider Veränderlichen, wenn die eine der schneidenden Geraden zu einer Koordinatenaxe selbst gewählt wird.

Für die Kurven dritter Ordnung insbesondere können diese Produkte als die Rauminhalte von Quadern betrachtet werden; haben daher die höchsten Potenzen x^3 und y^3 der Gleichung dritten Grads gleiche Koeffizienten, so sind die aus den oben bezeichneten Abschnitten als Kanten erbauten Quader gleich; aus diesen sechs Abschnitten liefsen sich somit durch Vereinigung je zweier, die nicht auf derselben Sekante liegen, drei Seiten eines Dreiecks herstellen, in welchem nach dem Satz von Ceva die durch die Abschnitte bestimmten Transversalen sich in einem Punkte schneiden.

B. Singuläre Punkte im Ursprung mit den Koordinatenaxen als Tangenten.

50. Hat der letzte Term $f_n(x) = 0$ der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung (I) die Wurzel $x = 0$, fehlt also das konstante Glied, so geht die Kurve durch den Ursprung und man erhält für die bekanntesten der in 47. aufgeführten Fälle im Besonderen folgende Kriterien in den Koeffizienten bezw. folgende Normalformen der Kurvengleichung, welch letztere für die zunächst in Betracht kommenden Fälle nur vom dritten Grad zu sein braucht und lauten möge

$$\text{(Ia)} \quad f(x,y) = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a$$

$$\text{(I)} \qquad = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx + b)y + (lx^3 + gx^2 + cx + a).$$

Je nachdem die Wurzel $x = 0$ auftritt bei

a) $f_n(x) = 0$, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach,

erhält man

$$\text{(I)} \qquad 0 = hy^3 + ixy^2 + (kx + f)xy + (lx^2 + gx + c)x$$

$$\text{(Ia)} \qquad 0 = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + gx^2 + fxy + cx,$$

für $x = 0$ also drei Werte $y = 0$, für $y = 0$ dagegen nur einen $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Wendepunkt mit der Ordinatenaxe als Wendetangente.

b) $f_n(x) = 0$ dreifach,

(I) $0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx + b)y + lx^3$

(Ia) $0 = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + fxy + ey^2 + by,$

für $x = 0$ einen Wert $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Wendepunkt mit Abscissenaxe als Wendetangente.

c) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

(I) $0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3 + gx^2$

(Ia) $0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + (ey^2 + fxy + gx^2),$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$ und umgekehrt, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt. Derselbe ist als solcher aus der Form (Ia) der Kurvengleichung sofort zu erkennen, wenn das niederste Aggregat von der zweiten Dimension ist (siehe d, e, f).

d) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

(I) $0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3$

(Ia) $0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + ey^2 + fxy,$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt, dessen eine Tangente die Abscissenaxe ist.

e) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach,

(I) $0 = hy^3 + ixy^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3$

(Ia) $0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + fxy$

für $x = 0$ drei Werte $y = 0$ und umgekehrt, für eine beliebige Gerade $y = \lambda x$ durch den Ursprung dagegen nur zwei Werte $x = 0$, $y = 0$, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt mit den Koordinatenaxen als Tangenten.

f) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ doppelt,

(I) $0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + kx^2y + lx^3$

(Ia) $0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + ey^2,$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, also zunächst der Ursprung Doppelpunkt mit Abscissenaxe als Tangente (wie bei d). Während jedoch dort zwei ausgezeichnete Geraden vorhanden sind, welche die Kurve im Ursprung in drei Punkten schneiden, also Tangenten des Doppelpunkts sind, nämlich

$$ey^2 + fxy = y(ey + fx) = 0,$$

d. h. die Abscissenaxe und die Ursprungsgerade $\frac{y}{x} = -\frac{f}{e}$, existiert hier gemäfs

$$ey^2 = 0$$

nur die Abscissenaxe als einzige aber doppelt zu zählende Tangente, der

Ursprung ist somit ein Doppelpunkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten, d. h. ein Rückkehrpunkt, eine sog. Spitze I. Art.

Analog lautet die Gleichung der Kurve, die im Ursprung einen Rückkehrpunkt mit der Ordinatenaxe als Tangente besitzt:

$$(hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + gx^2 = 0.$$

51. Um allgemein für jede beliebige durch den Ursprung gehende Kurve das Verhalten in diesem Punkt zu ermitteln, betrachtet De Gua das Aggregat der durch die unterste Bestimmungsgerade des analytischen Dreiecks ausgeschiedenen Glieder der Kurvengleichung. Da dieses Aggregat stets auf die Form gebracht werden kann

$$(y^m - Ax^n)(y^p - Bx^q)(y^r - Cx^s)\cdots = 0,$$

wo m und n ganze positive Zahlen sind, so beschränken sich nach De Gua die Möglichkeiten, wie die beiden durch den Ursprung getrennten Teile eines und desselben Zweigs $y^m - Ax^n = 0$ sich in diesem Punkt vereinigen können, auf drei Fälle:

Diese Vereinigung erfolgt, je nachdem

m ungerade, n gerade	nach Art der Krümmung im Scheitel der	konischen Parabel	also in einem	gewöhnlichen Punkt
m ungerade, n ungerade		I. kubischen Parabel		Wendepunkt
m gerade, n ungerade		II. kubischen Parabel		Rückkehrpunkt.

Selbstberührung.

52. Im Anschluſs an die Spitze I. Art, die er als eine Selbstberührung der Kurve auffaſst, untersucht nun De Gua, um sämtliche einfachen Singularitäten aufzufinden, den allgemeinsten Fall der Selbstberührung einer algebraischen Kurve, geometrisch dargestellt durch die Berührung zweier konisch parabolischer Zweige im Ursprung als Scheitel, analytisch durch das Aggregat der Glieder niederster Ordnung:

(I) $$y^4 + axy^2 \pm b^2x^2 = 0$$

oder

(Ia) $$\left(y^2 - \frac{-a + \sqrt{a^2 \mp 4b^2}}{2}x\right)\left(y^2 - \frac{-a - \sqrt{a^2 \mp 4b^2}}{2}x\right) = 0$$

und findet für

a) b^2 positiv, $4b^2 < a^2$:

Parabolische Berührung von innen, als Embrassement bezeichnet, ein Doppelpunkt, der erst bei Kurven vierter Ordnung auftritt, da die Abscissenaxe als Tangente vierpunktig berührt (Fig. 45).

b) b^2 positiv, $4b^2 > a^2$:

Isolierter Selbstberührungspunkt ohne Zweige bezw. Doppelpunkt mit zwei imaginär konjugierten parabolischen Zweigen und gemeinsamer Tan-

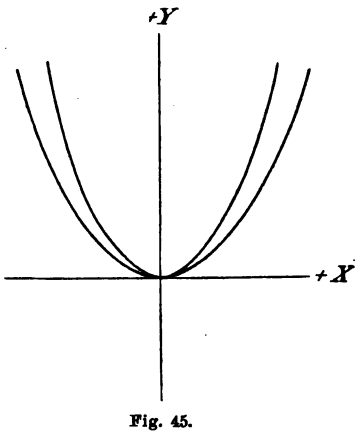

Fig. 45.

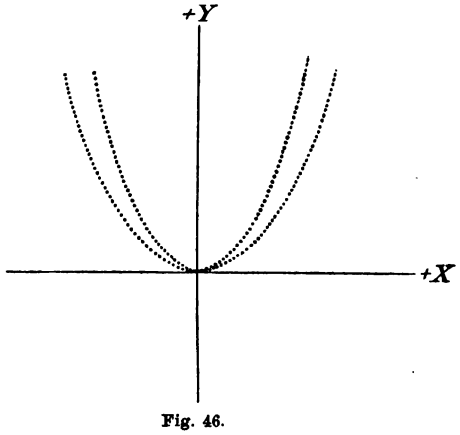

Fig. 46.

gente, als point conjugué de la 2e espèce bezeichnet, zum Unterschied gegen den isolierten Punkt mit zwei imaginär konjugierten Tangenten, point conjugué de la 1e espèce (Fig. 46. 47).

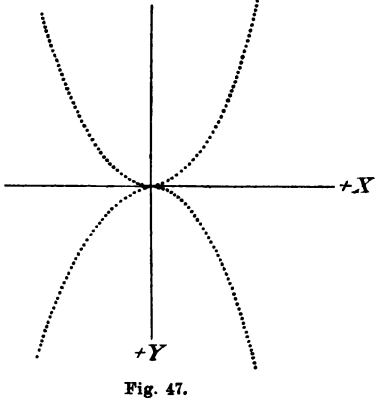

Fig. 47.

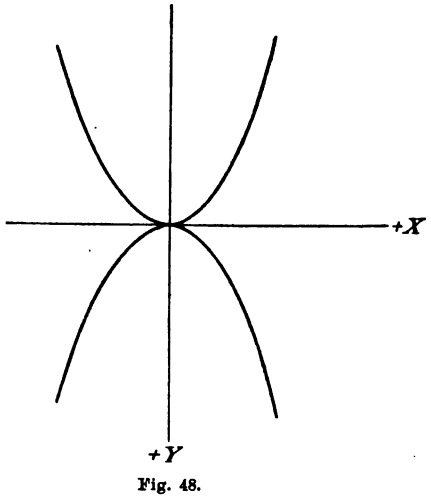

Fig. 48.

c) b^2 positiv, $4b^2 = a^2$,

womit (I) übergeht in ein vollständiges Quadrat:

(II) $$(y^2 + \frac{a}{2}x)^2 = 0,$$

d. h. die parabolischen Zweige decken sich, also Berührung von innen oder Embrassement.

d) b^2 negativ, $4b^2 \gtrless a^2$.

Parabolische Berührung von aufsen, von De Gua als „Oskulation" bezeichnet, die ebenso gut durch Vereinigung zweier Spitzen I. Art wie zweier Wendepunkte entstanden gedacht und deshalb auch als Kombination betrachtet werden kann (Fig. 48. 50. 49). Gleichung (I) begreift daher für den Fall d) auch die Gleichungen der Spitze und des Wendepunkts in sich.

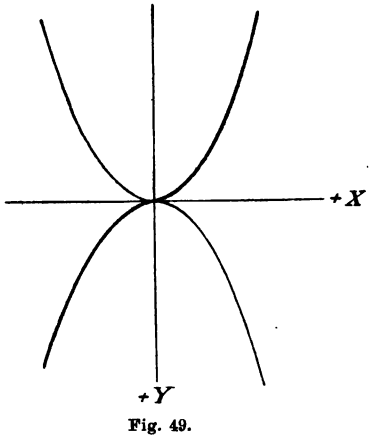

Fig. 49.

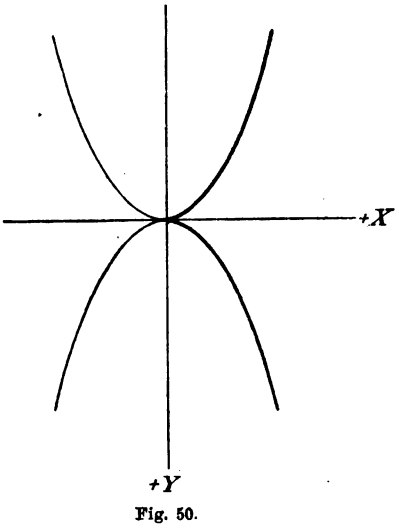

Fig. 50.

Im Falle c) beansprucht nun De Gua dasselbe Embrassement wie im Fall a), wo die parabolischen Zweige getrennt sind, und bestreitet somit, da bei der Übereinstimmung der analytischen Gleichung kein Grund vorliege, im einen oder anderen Fall die Parabelzweige im Ursprung aufhören zu lassen, dafs die von De l'Hospital durch Evolution aufgefundene Schnabelspitze (Fig. 51) eine selbständige Singularität darstelle. Obwohl De Gua die Entstehung der Schnabelspitze bei der durch stete Abwicklung eines auf eine Kurve aufgelegten Fadens sich bildenden Evolvente, wenn der Faden einen Wendepunkt passiert, keineswegs in Abrede stellt, so betrachtet er doch keinen der beiden Zweige derselben als die Fortsetzung des andern, da

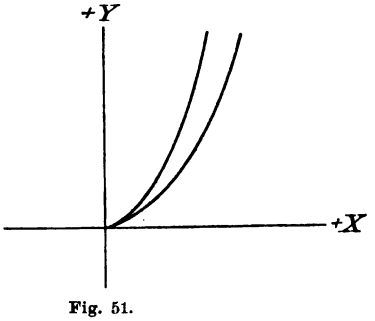

Fig. 51.

er eben aus Gleichung (I) bezw. (II) — und De Gua anerkennt nur die analytische Gleichung als den Inbegriff aller geometrischen Eigenschaften der Kurve — die analytische Zusammengehörigkeit beider Zweige nicht zu erkennen vermag; er behauptet also trotz der Kontinuität der Bewegung, durch die eine Kurve erzeugt wird, die Diskontinuität derselben Kurve, ein Widerspruch, den erst Euler 1748 in seiner Arbeit: Sur le point de rebroussement de la 2e espèce, Mém. de Berlin 1748, beseitigt, indem er zeigt, daſs unter Umständen der erste Term einer Entwicklung $y^m = Ax^n$ bezw. $y = A\overset{n}{x^m}$ für die Beurteilung der geometrischen Gestalt des hierdurch dargestellten Zweigs nicht immer ausreicht, wie De Gua meint, insofern als für gewisse Werte von x das erste Glied der Entwicklung wohl reell, das zweite dagegen imaginär und somit die ganze Reihe komplex werden kann, in welchem Fall reelle Zweige auch trotz des reellen ersten Terms nicht bestehen. Hierfür sind zwei treffende Beispiele die Kurven vierter Ordnung:

(A) $$x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{a^2}{4}y^2 = 0$$

(B) $$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{a^2}{4}y^2 = 0,$$

die beide im Ursprung dieselbe innere parabolische Selbstberührung

(II) $$\left(x^2 - \frac{a}{2}y\right)^2 = 0$$

besitzen. Entwickelt man jeden der beiden Zweige (I), so folgt (vgl. hierzu den Beweis von Stirling in 29.) für Kurve (A):

(1) $$y = \frac{2}{a}x^2 + u$$

$$\frac{a^2}{4}u^2 - a\left(\frac{2}{a}x^2 + u\right)^3 = 0$$

(2) $$\frac{a^2}{4}u^2 - \frac{8}{a^2}x^6 - \frac{12}{a}ux^4 - 6u^2x^2 - au^3 = 0,$$

woraus nach dem analytischen Dreieck die untere Bestimmungsgerade

$$\frac{a^2}{4}u^2 - \frac{8}{a^2}x^6 = 0$$

(3) $$u = \pm\frac{4\sqrt{2}}{a^2}x^3 + t$$

eingesetzt in (2) folgt:

$$\left(\frac{a^2}{4} - 6x^2\right)\left(\frac{32}{a^4}x^6 \pm \frac{8\sqrt{2}}{a^2}x^3t + t^2\right) - \frac{8}{a^2}x^6 - \frac{12}{a}x^4\left(t \pm \frac{4\sqrt{2}}{a^2}x^3\right)$$
$$- a\left(t^3 \mp \frac{12\sqrt{2}}{a^2}x^3t^2 + \frac{96}{a^4}x^6t \pm \frac{128\sqrt{2}}{a^6}\right) = 0,$$

woraus wieder die untere Bestimmungsgerade

$$(4) \qquad \pm 2\sqrt{2}\cdot x^3 t \mp \frac{48\sqrt{2}}{a^3} x^7 = 0$$

$$t = \frac{24}{a^3} x^4.$$

Die Entwicklungen für die beiden Zweige (I) lauten daher gemäfs (1), (3), (4):

$$(\text{II a}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + \frac{4\sqrt{2}}{a^2} x^3 + \frac{24}{a^3} x^4 + \cdots$$

$$(\text{II b}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{a^2} x^3 + \frac{24}{a^3} x^4 - \cdots$$

und die jeweiligen beiden Ordinaten, die sich aus (II a) für die Abscissen $\pm x$ ergeben, sind somit vertauscht dieselben, die für die gleichen Abscissen aus (II b) folgen (Fig. 52); man erhält somit zwei zur Ordinatenaxe symmetrische, dem Ursprung zu sich auf der konkaven bezw. konvexen Seite mehr und mehr der Parabel $y = \frac{2}{a} x^2$ nähernde Paare reeller Zweige, d. h. eine reelle vollständige innere Berührung (Embrassement).

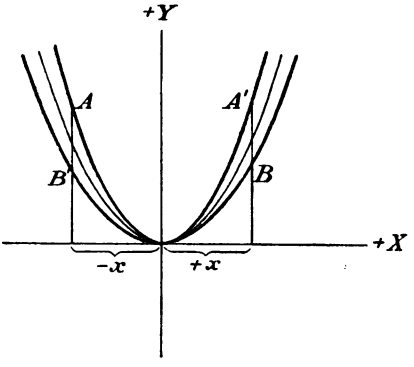

Fig. 52.

Kurve (B):

$$(1) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + u$$

$$(2) \qquad \frac{a^2}{4} u^2 - ax\left(\frac{2}{a} x^2 + u\right)^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{4} u^2 - \frac{4}{a} x^5 - 4x^3 u - axu^2 = 0,$$

woraus die untere Bestimmungsgerade

$$\frac{a^2}{4} u^2 - \frac{4}{a} x^5 = 0$$

$$(3) \qquad u = \pm \frac{4\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}} + t$$

eingesetzt in (2)

$$\left(\frac{a^2}{4} - ax\right)\left(\frac{16}{a^3} x^5 \pm \frac{8\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}} \cdot t + t^2\right) - 4x^3\left(t \pm \frac{4\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{4}{a} x^5 = 0$$

oder mit $\sqrt{x} = z$, da die Bruchpotenzen von x durch die Multiplikation nicht verschwinden und somit behufs Auftragung der Gleichung auf das analytische Dreieck zu den schon vorhandenen Parallelen mit der Bande ohne x noch die Parallelen im mittleren Abstand gezogen werden müfsten

$$-\frac{16}{a^2} z^{12} - \frac{16\sqrt{a}}{a^2} z^{11} \mp \frac{8\sqrt{a}}{a} z^7 t - 4z^6 t \pm 2\sqrt{a} z^5 t - az^2 t^2 + \frac{a^2}{4} t^2 = 0,$$

woraus zwei untere Bestimmungsgeraden:

$$t^2 + z^5 t = 0 \quad \text{oder} \quad t = z^5 = x^{\frac{5}{2}}$$

giebt keinen neuen Term, dagegen

$$(4) \quad \pm 2\sqrt{a} \cdot z^5 t \mp \frac{16\sqrt{a}}{a^2} z^{11} = 0 \quad \text{oder} \quad t = \frac{8}{a^2} z^6 = \frac{8}{a^2} x^3$$

und somit gemäfs (1), (3), (4) die Entwicklungen für die beiden Zweige (I)

$$(\text{IIc}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + \frac{4\sqrt{a}}{a} x^2\sqrt{x} + \frac{8}{a^2} x^3 + \cdots$$

$$(\text{IId}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 - \frac{4\sqrt{a}}{a} x^2\sqrt{x} + \frac{8}{a} x^3 - \cdots$$

Für negative Werte von x wird der zweite Term und somit jede der beiden Reihen imaginär, es bestehen daher nur auf der positiven Seite der Abscissenaxe zwei, dem Ursprung zu sich mehr und mehr der Parabel $y = \frac{2}{a} x^2$ nähernde Zweige, deren Ordinaten, stets sehr kleine Werte von x vorausgesetzt, durch Vermehren bezw. Vermindern der Ordinaten jener Parabel um den Betrag $\frac{4}{\sqrt{a}} \cdot x^2\sqrt{x}$ erhalten werden. Die Kurve hat also im Ursprung eine Schnabelspitze (Fig. 53) und der von De Gua vergebens gesuchte analytische Ausdruck für die geometrische Zusammengehörigkeit beider Zweige derselben d. h. dafür, dafs jeder der Zweige sich durch die Spitze hindurch in den andern fortsetzt, lautet demnach

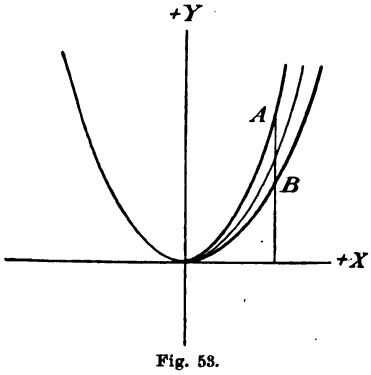

Fig. 53.

$$(\text{III}) \qquad y = Ax^2 \pm Bx^{\frac{5}{2}}.$$

Die Schnabelspitze.

53. Schafft man in 52. III die Wurzelgröfse weg, so folgen aus der nach Potenzen von y geordneten Gleichung

$$(\text{IIIa}) \quad y^2 - 2Ax^2y + (A^2 - B^2x)x^4 = 0$$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ vier Werte $x = 0$, die Schnabelspitze ist somit ein Doppelpunkt mit der Abscissenaxe als Wendetangente, in Übereinstimmung mit 47. h, da $x = 0$ als Wurzel auftritt bei

$f_n(x) = 0$ vierfach, $f_{n-1}(x) = 0$ doppelt,

desgleichen in Übereinstimmung mit 47. m, sobald man die Gleichung nach Potenzen von x ordnet:

$$(\text{III}) \qquad B^2x^5 - A^2x^4 + 0 \cdot x^3 + 2Ayx^2 + 0 \cdot x - y^2 = 0,$$

in welcher $y = 0$ als Wurzel auftritt bei

$$f_n(y) = 0 \text{ doppelt, } f_{n-1}(y) = 0, \; f_{n-2}(y) = 0, \; f_{n-3}(y) = 0 \text{ einfach.}$$

Aus der gleichzeitig nach beiden Variabeln geordneten Gleichung (IIIb) folgt ferner gemäfs 50. f, da das Aggregat der Glieder niederster Dimension sich auf $y^2 = 0$ reduziert, dafs auch der zweite Zweig des Doppelpunkts die Abscissenaxe berührt. Die Schnabelspitze ist somit, wie schon Maupertuis aus geometrischen Betrachtungen richtig erkannt hat (vgl. 9), aufzufassen als Spitze I. Art, deren einer Zweig im Ursprung noch einen Wendepunkt besitzt, beide Zweige verlaufen somit auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente.

53a. Untersucht man die Kurven niederster Ordnung, für welche die Ordinate sich als steigende Potenzreihe der Abscisse darstellt, aber so, dafs einer der Terme eine gerade Wurzel enthält, damit nur positive Werte von x reelle Ordinaten ergeben, so sind die einfachsten Fälle:

a) $y = \alpha x \pm \beta x^{\frac{3}{2}}$ oder $(y - \alpha x)^2 = \beta^2 x^3$,

eine Kurve dritter Ordnung mit zwei der Geraden $y = \alpha x$ im Ursprung sich nähernden Zweigen, deren Ordinaten durch Vermehren bezw. Vermindern der Ordinate jener Geraden um den Betrag $\beta x\sqrt{x}$ erhalten werden. Die Kurve hat somit im Ursprung eine Spitze I. Art; dieselbe Singularität besitzen sämtliche höheren Kurven, für welche die Potenzreihe mit einem linearen Term beginnt, also

$$y = \alpha x + \beta x^m \sqrt[n]{x^p},$$

da sich wegen des durch die gerade Wurzel bedingten Doppelzeichens $\pm$ beide Zweige der Kurve von entgegengesetzten Seiten her der Geraden $y = \alpha x$ nähern.

b) $y = \alpha x^2 \pm \beta x^{\frac{5}{2}}$ oder $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$,

eine Kurve fünfter Ordnung mit Schnabelspitze im Ursprung (vgl. 52. III). Aufserdem schneidet die Kurve noch die Abscissenaxe im Punkt $x = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

c) $y = \alpha x^{\frac{1}{2}} \pm \beta x^{\frac{3}{4}}$ oder $(y^2 - \alpha^2 x)^2 = 4\alpha\beta^2 \cdot x^2 y + \beta^4 x^3$.

Um die Annäherung dieser Kurve vierter Ordnung an die Parabel $y^2 = \alpha^2 x$ zu ermitteln, sind diesmal die Zweige nach Potenzen von y zu entwickeln, daher

$$x = \frac{y^2}{\alpha^2} + u$$

eingesetzt

$$\alpha^4 u^2 - 4\alpha\beta^2 \cdot y\left(\frac{y^2}{\alpha^2} + u\right)^2 - \beta^4\left(\frac{y^2}{\alpha^2} + u\right)^3 = 0,$$

woraus die unterste Bestimmungsgerade

$$\alpha^4 u^2 - 4\alpha\beta^2 \cdot \frac{y^5}{\alpha^4} = 0$$

$$u = \pm \frac{2\beta}{\alpha^3 \sqrt{\alpha}} y^{\frac{5}{2}}$$

und somit die beiden Entwicklungen

$$x = \frac{1}{\alpha^2} \cdot y^2 \pm \frac{2\beta}{\alpha^3 \sqrt{\alpha}} \cdot y^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

d. h. die vorliegende Kurve vierter Ordnung hat im Ursprung eine Schnabelspitze mit der Ordinatenaxe als Tangente. Die Schnabelspitze tritt somit bei den Kurven vierter Ordnung erstmals als Singularität auf. (Euler, Mém. de Berlin 1748, pg. 212.)

Spitzpunkt.

54. Unter denjenigen singulären Punkten, in denen sich die Teile eines Zweigs, abgesehen vom Grad der Krümmung, wie in einem gewöhnlichen Punkt vereinigen, schenkt De Gua noch eine kurze Beachtung dem Spitzpunkt, den er erstmals in der in 22. Fig. 12 beschriebenen Weise als Sonderfall eines dreifachen Punkts auffafst (point triple à trois directions égales ou coincidentes et d'une multiplicité invisible), während Maupertuis ihn durch das Zusammenfallen zweier Spitzen I. Art und eines Doppelpunkts (point de double pointe, vgl. 22. Fig. 13), De Bragelongne durch das Verschwinden eines Knotens (Lemnisceros infiniment petit) nach Art der Fig. 54, also durch das Zusammenfallen dreier Doppelpunkte entstehen läfst, was De Gua für geometrisch unzulässig erachtet, da er einen dreifachen Punkt nicht äquivalent drei Doppelpunkten anzusehen vermag. Mit letzterer Ansicht steht somit De Gua im Widerspruch zur heutigen Auffassung, die mit derjenigen von Maupertuis und De Bragelongne übereinstimmt, insofern als, gestützt auf Betrachtungen über den Schnitt einer Kurve und ihrer ersten Polare, jeder $k$fache Punkt zu $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten zu rechnen ist.

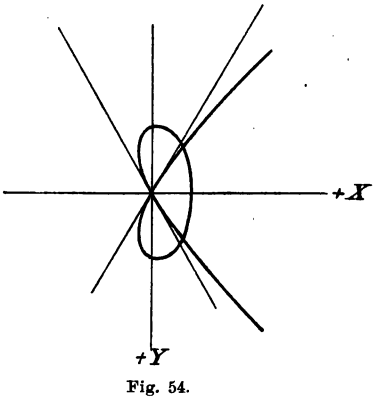

Fig. 54.

C. Singuläre Punkte im Ursprung mit beliebiger Tangentenrichtung.

55. Zur Ermittelung der Tangenten dreht De Gua die Ordinatenaxe um einen Winkel $\sphericalangle \varphi$, bestimmt durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{n}$, bis die Anzahl der im Ursprung zusammenfallenden Schnittpunkte der neuen Ordinatenaxe U mit der Kurve den Bedingungen der Tangente genügt. Die Schnittpunktsgleichung dieser U-Axe mit der geg. Kurve

$$(1) \qquad f(x,y) = a + (by + cx) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + (lx^3) + \cdots$$

ergiebt sich mittels

$$x = nu, \qquad y = mu$$

(vgl. 38) zu

$$(2) \qquad \varphi(u) = a + (bm + cn)u + (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (hm^3 + im^2n + kmn^2 + ln^3)u^3 + \cdots$$

Ist daher der Ursprung ein $k$facher Punkt, so mufs jeder Strahl durch den Ursprung die Kurve in diesem Punkt in k zusammenfallenden Punkten treffen d. h. für jedes beliebige m und n müssen sich k Werte $u = 0$ ergeben, woraus folgt, dafs die k ersten Terme von (2) identisch verschwinden müssen, daher

Satz: Ist das niederste Aggregat der nach steigenden Potenzen beider Variabeln geordneten Kurvengleichung von $k$ten Grad, so hat die Kurve im Ursprung einen $k$fachen Punkt.

Es ist somit der Ursprung:

gewöhnlicher Kurvenpunkt	für	$a = 0$
Doppelpunkt	„	$a = 0 \quad b = 0, \; c = 0$
Dreifacher Punkt . . .	„	$a = 0, \; b = 0, \; c = 0$ $e = 0, \; f = 0, \; g = 0$ } u. s. w.

Soll die U-Axe für einen der Zweige des $k$fachen Punkts Tangente werden, so mufs sie die Kurve in $k + 1$ Punkten im Ursprung treffen; es mufs daher in (2) auch noch der Term u^k d. h. das Aggregat der Glieder $k$ter Dimension in (1) verschwinden, somit

Satz: Das gleich Null gesetzte Aggregat der Glieder niederster Dimension $f_k(x,y) = 0$ der nach steigenden Potenzen beider Variabeln geordneten Kurvengleichung giebt die k Tangenten des $k$fachen Punkts im Ursprung.

Erstes Beispiel: Das niederste Aggregat von der zweiten Dimension:

$$f(x,y) = (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + \cdots$$

Die Kurve hat im Ursprung einen Doppelpunkt (vgl. 50. c), dessen Tangentenpaar sich ergiebt aus

$$ey^2 + fxy + gx^2 = 0$$

als reell und getrennt, reell und zusammenfallend, imaginär konjugiert, je nachdem die Diskriminante $f^2 - 4eg \gtreqless 0$, d. h. der Ursprung ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt, eine Spitze I. Art oder ein isolierter Punkt I. Art, wie ihn schon Newton durch das Verschwinden des bei gewissen Kurven dritter Ordnung sich abspaltenden Ovals entstehen läfst.

Zweites Beispiel. Das niederste Aggregat von der dritten Dimension:

$$f(x, y) = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + \cdots$$

Die Kurve hat im Ursprung einen dreifachen Punkt, dessen Tangenten sich ergeben aus

$$hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0.$$

Je nach der Beschaffenheit der Wurzeln bestehen für den dreifachen Punkt folgende Möglichkeiten:

a) Alle drei Wurzeln reell und verschieden: Gewöhnlicher dreifacher Punkt mit drei getrennten Ästen.

b) Zwei Wurzeln imaginär konjugiert, die dritte reell: Ein gewöhnlicher Kurvenzweig mit einem darauf liegenden isolierten Punkt I. Art, Vielfachheit und Singularität also unsichtbar.

c) Zwei Wurzeln reell und gleich, die dritte verschieden: Spitze I. Art oder Oskulation oder Embrassement oder isolierter Punkt II. Art mit je einem weiteren, in anderer Richtung verlaufenden Zweig.

d) Alle drei Wurzeln reell und gleich: Spitze I. Art oder Oskulation oder Embrassement oder isolierter Punkt II. Art, sämtlich mit je einem weiteren in derselben Richtung verlaufenden Zweig, oder endlich Spitzpunkt.

56. Soll eine der Tangenten des $k$fachen Punkts Wendetangente für den zugehörigen Zweig werden, so mufs sie die Kurve im Ursprung in einem weiteren, also insgesamt in $k + 2$ Punkten treffen; es mufs also für den dieser Tangente zugehörigen Wert von $\frac{m}{n}$ aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von u^k auch noch der Koeffizient von u^{k+1} verschwinden oder auf Gleichung (1) der Kurve übertragen:

Satz: Ist eine einfache Wurzel des Aggregats der Glieder niederster Dimension $f_k(x, y) = 0$ zugleich eine Wurzel des nächst höheren Aggregats, so ist die durch diese Wurzel bestimmte Tangente eine Wendetangente für den zugehörigen Zweig des $k$fachen Punkts.

Beispiel: Soll einer der Zweige des Doppelpunkts der Kurve dritter Ordnung

$$(1) \qquad f(x, y) = (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3)$$

eine Wendetangente im Ursprung besitzen, so ergiebt sich dieselbe als gemeinschaftliche Wurzel von

$$(2) \qquad hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0$$

$$(3) \qquad ey^2 + fxy + gx^2 = 0,$$

wenn $\frac{y}{x} = z$ gesetzt wird, gemäfs 16. aus

$$\begin{array}{l|l} hz^3 + iz^2 + kz + l & ez^2 + fz + g \\ \hline hz^3 + \frac{fh}{e} z^2 + \frac{gh}{c} z & \frac{h}{e} z + \frac{1}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right) \\ \hline \left(i - \frac{fh}{e}\right) z^2 + \left(k - \frac{gh}{e}\right) z + l & \\ \left(i - \frac{fh}{e}\right) z^2 + \frac{f}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right) z + \frac{g}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right) & \\ \hline \left(k - \frac{gh}{e} - \frac{fi}{e} + \frac{f^2h}{e^2}\right) z + l - \frac{gi}{e} + \frac{ghf}{e^2} & \end{array}$$

$$(4) \qquad \left(k - \frac{gh}{e} - \frac{fi}{e} + \frac{f^2h}{e^2}\right) z + l - \frac{gi}{e} + \frac{ghf}{e^2} = 0,$$

als letzter Divisor, zu

$$(4a) \qquad \frac{y}{x} = \frac{gei - le^2 - fgh}{e^2k + f^2h - egh - efi}$$

mit der am Schlufs des hier nicht weiter ausgeführten Kettenverfahrens in den Koeffizienten von (2) und (3) sich ergebenden Bedingung, die einfacher durch Substitution des Werts (4a) in (3) erhalten wird und lautet

$$e(gei - le^2 - fgh)^2 + f(gei - le^2 - fgh)(e^2k + f^2h - egh - efi) + g(e^2k + f^2h - egh - efi)^2 = 0.$$

57. Ist eine Wurzel von $f_k(x, y) = 0$ aufser von $f_{k+1}(x, y) = 0$ auch noch Wurzel von $f_{k+2}(x, y) = 0$, so trifft die durch diese Wurzel bestimmte Tangente den $k$fachen Punkt in k + 2 Punkten, sie ist also Flachpunktstangente des zugehörigen Zweigs (serpentement infiniment petit); ist dieselbe Wurzel auch noch Wurzel von $f_{k+3}(x, y) = 0$, so hat der zugehörige Zweig im Ursprung einen Wendeflachpunkt (serpentement infiniment petit compliqué d'inflexion) u. s. w., daher

Satz: Je nachdem die Anzahl der Aggregate niederster Ordnung, die eine einfache Wurzel $\frac{y}{x}$ gemeinschaftlich haben, eine ungerade bezw. eine gerade ist, berührt die durch diesen Wurzelwert bestimmte Tangente den zugehörigen Zweig, abgesehen vom Grad der Krümmung desselben, wie in einem gewöhnlichen bezw. einem Wendepunkt.

58. Sobald das Aggregat der Glieder niederster Ordnung mehrfache Wurzeln besitzt, die zugleich ein- oder mehrfache Wurzeln der nächst höheren Aggregate sind, ist die Beurteilung der Singularität des Ursprungs aus der vorliegenden Kurvengleichung auch mit Zuhilfenahme des analytischen Dreiecks im allgemeinen nicht mehr möglich, falls nicht die Gleichung eine ganz spezielle Form besitzt. Hier greift De Gua wieder zu dem erprobten Mittel der Transformation wie bei den Asymptoten (vgl. 39). Mittels der bekannten Gleichungen

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

wo $\frac{m}{n} = \alpha$ die betreffende mehrfache Wurzel des niedersten Aggregats, also die Richtung der Tangente des zu untersuchenden singulären Kurvenzweigs ist, bezieht er die geg. Kurve auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, das jene Tangente zur Ordinatenaxe hat, Ursprung und Abscissenaxe dagegen unverändert beibehält, führt aber wieder die Transformation nicht durch, da zur Ermittelung der betreffenden Singularität die Form der transformierten Gleichung, die er, wie folgt, auf Grund der gegebenen Bedingungen ohne Schwierigkeit aufzustellen vermag, vollständig ausreicht: Hat nämlich ein gewisses Aggregat $f_k(x, y) = 0$ eine mehrfache Wurzel $\frac{y}{x} = \alpha$, so mufs das entsprechende Aggregat $\varphi_k(z, u) = 0$ der transformierten Gleichung $\varphi(z, u) = 0$, die dieselbe Kurve wie $f(x, y) = 0$ mit unveränderten geometrischen also auch unveränderten analytischen Eigenschaften darstellt, sich ebenso oft durch $\frac{z}{u} = 0$ bezw. $z = 0$ teilen lassen.

Man erhält alsdann für die Kurven vierter und fünfter Ordnung folgende Singularitäten (vgl. 40. 41. 42), je nachdem $\frac{y}{x} = \alpha$ als Wurzel vorkommt bei

a) $f_2(x, y) = 0$ doppelt, $f_3(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (u^2 z + u z^2 + z^3) + (u^4 + \cdots + z^4) + \cdots$$

Die Kurve verhält sich nach dem analytischen Dreieck im Ursprung wie

$$u^4 + u^2 z + z^2 = 0$$

oder

$$(u^2 + C_1 \cdot z)(u^2 + C_2 \cdot z) = 0.$$

Der Ursprung ist somit ein Selbstberührungspunkt, der als Doppelpunkt zählt und erst bei Kurven von der vierten Ordnung an auftritt. Determination des Selbstberührungspunkts nach den Werten von C (vgl. 52).

b) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = z^2 + (u z^2 + z^3) + (u^4 + \cdots + z^4) + \cdots$$

Annäherung: $u^4 + z^2 = 0$, welche zerfällt

entweder in

$$(u^2 + Cz)(u^2 - Cz) = 0$$

oder in

$$(u^2 + iCz)(u^2 - iCz) = 0.$$

Der Ursprung ist somit entweder eine „Oskulation“ oder ein isolierter Punkt II. Art.

c) $f_2(x, y) = 0$ doppelt, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (u^2 z + uz^2 + z^3) + (u^3 z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^2 z = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 + z = 0$$

und

$$u^2 z + z^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 + z = 0.$$

Der Ursprung ist ein Selbstberührungspunkt der Kurve von der Art, wie die I. kubische und die konische Parabel sich im Scheitel berühren. Dieser Doppelpunkt ist erst bei Kurven fünfter Ordnung möglich.

d) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ doppelt, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (uz^2 + z^3) + (u^3 z + \cdots z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^5 + z^2 = 0$

d. h. die Kurve hat im Ursprung einen Rückkehrflachpunkt, von De Gua wie in 24. wohl auf Grund der Regel in 56. als mit zwei verschwindenden Wendepunkten behaftet, richtig aufgefafst und als rebroussement du 2^d ordre bezeichnet, nicht zu verwechseln mit rebroussement de la 2e espèce, der Schnabelspitze.

e) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

Der Ursprung ist wie bei d) Rückkehrflachpunkt.

f) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt, aber imaginär konjugiert:

Der Ursprung ist ein isolierter Punkt I. Art und zugleich Flachpunkt für jeden seiner beiden imaginär konjugierten Zweige.

g) $f_3(x, y) = 0$ dreifach,

$$0 = z^3 + (u^4 + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^4 + z^3 = 0.$

Der Ursprung ist somit ein Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit) mit drei zusammenfallenden Tangenten, zählt als dreifacher Punkt und kann erst bei Kurven vierter Ordnung auftreten.

h) $f_3(x, y) = 0$ dreifach, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^3 + (u^3 z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^3 z = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 + z = 0$$

und

$$u^3 z + z^3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 + z^2 = 0.$$

Die Kurve hat im Ursprung einen Selbstberührungspunkt in der Art wie I. kubische und konische Parabel sich im Scheitel berühren (Fig. 55) (vgl. c).

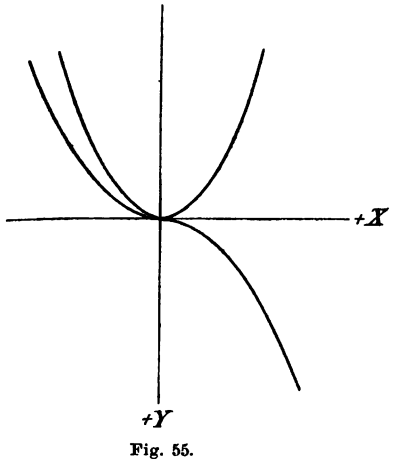

Fig. 55.

i) $f_3(x, y) = 0$ dreifach, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = z^3 + (u^2 z^2 + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^5 + z^3 = 0$.

Der Ursprung ist ein Wendespitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion), von De Gua wie in der in 23. beschriebenen Weise richtig aufgefafst.

k) $f_3(x,y) = 0$, $f_4(x,y) = 0$ dreifach,

$$0 = z^3 + (u z^3 + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + z^3 = 0.$$

Der Ursprung ist Wendespitzpunkt (vgl. i).

l) $f_3(x, y) = 0$ doppelt, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = (u z^2 + z^3) + (u^3 z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^3 z + u z^2 = 0$$

oder

$$u^4 + u^2 z + z^2 = 0$$

oder

$$(u^2 + C_1 \cdot z)(u^2 + C_2 \cdot z) = 0 \text{ (vgl. a).}$$

m) $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = (u z^2 + z^3) + (u^2 z^2 + \cdots z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u z^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^4 + z^2 = 0 \text{ (vgl. b).}$$

n) $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt, aber imaginär konjugiert:

Die Kurve geht mit einem reellen Zweig durch den Ursprung, letzterer ist zugleich ein isolierter Punkt mit zwei imaginär konjugierten Wendeparabelzweigen.

o) $f_4(x, y) = 0$ dreifach,

$$0 = (u z^3 + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + uz^3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^4 + z^3 = 0.$$

Der Ursprung ist ein Spitzpunkt mit einem weiteren schneidenden Zweig.

p) $f_4(x, y) = 0$ vierfach,

$$0 = z^4 + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + z^4 = 0.$$

Der Ursprung ist ein Rückkehrspitzpunkt (point de triple pointe), von De Gua wie in 24. richtig aufgefafst.

q) $f_4(x, y) = 0$ doppelt; besteht noch eine zweite Doppelwurzel dieses Aggregats, dann können folgende Fälle eintreten:

1) beide Doppelwurzeln imaginär konjugiert: Im Ursprung liegen zwei isolierte Punkt I. Art, er ist also ein vierfacher isolierter Punkt.

2) beide Doppelwurzeln reell: Zwei Rückkehrpunkte oder Spitzen I. Art in Juxtaposition (Fig. 56).

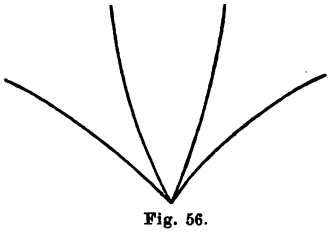

Fig. 56.

r) $f_4(x, y) = 0$ doppelt, die beiden andern Wurzeln des Aggregats:

1) imaginär konjugiert: Spitze I. Art mit isoliertem Punkt I. Art.

2) reell und verschieden: Spitze I. Art mit Doppelpunkt in Juxtaposition d. h. zwei weiteren in verschiedener Richtung durch die Spitze gehenden Zweigen u. s. w.

59. Sucht man die bei diesen Untersuchungen erhaltenen Singularitäten durch das rein geometrische Verfahren der Koinzidenz der einzelnen Zweige des entsprechenden mehrfachen Punkts zur Anschauung zu bringen, so führt dies nur in zwei Fällen zum Ziel:

a) wenn die mehrfachen Wurzeln des niedersten Aggregats nicht zugleich Wurzeln der nächst höheren Aggregate sind,

b) wenn eine einfache Wurzel des niedersten Aggregats auch wieder nur als einfache Wurzel der nächst höheren Aggregats vorkommt, wenn also einfache Zweige mit Wende- bezw. Flachpunkten auftreten.

In allen anderen Fällen ist ohne Zuhilfenahme des analytischen Dreiecks die Art und Weise, wie diejenigen Zweige eines mehrfachen Punkts sich vereinigen, deren Tangenten zur Deckung gebracht werden, nicht zu beurteilen; z. B. ist 58, h aufzufassen als Sonderfall der Kurve (Fig. 57)

$$\varphi(z, u) = (z - \alpha u)(z - bu)(z - cu) + (z - au)\chi_3(z, u) + \chi_5(z, u) = 0,$$

deren Äste, von welchen der eine gemäfs 56. eine Wendetangente besitzt,

durch ihre Vereinigung (Fig. 58) im Falle $a = b = c = 0$ eher die Berührung einer Spitze II. Art denn einer solchen I. Art mit einer konischen Parabel zu erzeugen scheinen; ferner 58, i als Sonderfall der Kurve (Fig. 59)

$$\varphi(z, u) = (z - au)(z - bu)(z - cu) + (z - au)(z - bu)\chi_2(z, u) + \chi_5(z, u) = 0$$

mit einer einfachen und zwei Wendetangenten im Ursprung, durch deren Deckung eher die Entstehung eines Rückkehr bezw. Flachpunkts denn eines

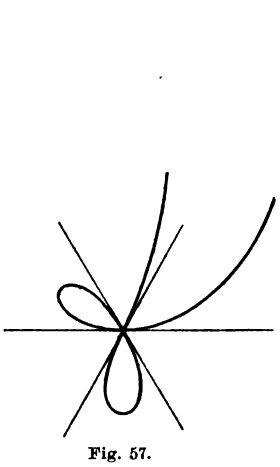

Fig. 57.

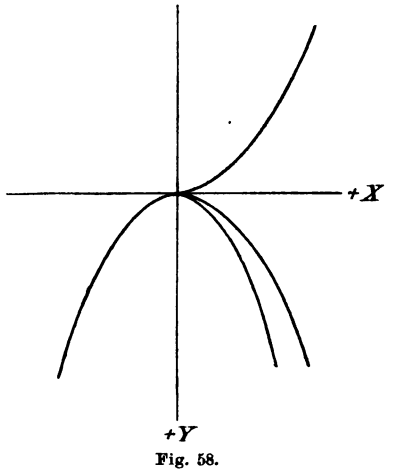

Fig. 58.

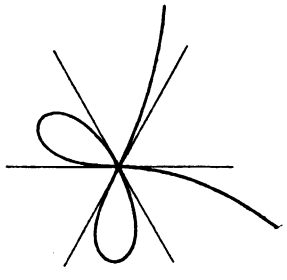

Fig. 59.

Wendespitzpunkts vermutet wird. Hier trifft den Entscheid einzig das analytische Dreieck bezw. die Newton'sche Regel, deren hohe Bedeutung für die Geometrie an dieser Stelle besonders einleuchtet.

Mehrfache und singuläre Punkte der Kurven bis zur V. Ordnung.

60. Im Anschluſs an 55. giebt De Gua erstmals eine auf die Kenntnis sämtlicher analytischer Kriterien gegründete Übersicht aller, zum gröſsten Teil bis dahin unbekannten, mehrfachen und singulären Punkte der Kurven bis zur fünften Ordnung einschlieſslich. Sie ist im Folgenden um die von De Gua nicht aufgenommene Schnabelspitze vermehrt und lautet:

Kurven II. Ordnung.

1 einfacher Punkt: Gewöhnlicher Ovalpunkt (point ordinaire).

Kurven III. Ordnung.

2 einfache Punkte: 1. Gewöhnlicher Ovalpunkt.
2. Wendepunkt (inflexion).

3 Doppelpunkte: 1. Gewöhnlicher Doppelpunkt (noeud, point de croix).
2. Spitze I. Art (point de rebroussement de la 1e espèce).
3. Isolierter Punkt I. Art (point conjugué de la 1e espèce).

Der einzige mehrfache Punkt mit reellen zusammenfallenden Tangenten d. h. die einzige Singularität ist die Spitze I. Art oder der Rückkehrpunkt.

Kurven IV. Ordnung.

3 einfache Punkte: 1. Gewöhnlicher Punkt.
2. Wendepunkt.
3. Flachpunkt (point de serpentement).

10 Doppelpunkte:

Die drei Doppelpunkte der Kurven dritter Ordnung.

4. Doppelpunkt mit einer Wendetangente (noeud compliqué d'inflexion).
5. Doppelpunkt mit zwei Wendetangenten.
6. Isolierter Punkt I. Art mit zwei imag. konj. Wendetangenten.
7. Parabolische Selbstberührung von aufsen (Oskulation).
8. Desgleichen von innen (Embrassement).
9. Isolierter Punkt II. Art mit zwei konj. parabolischen Zweigen.
10. Spitze II. Art oder Schnabelspitze (point de rebroussement de la 2e espèce).

4 dreifache Punkte:

1. Gewöhnlicher dreifacher Punkt (point triple ordinaire).
2. Spitze I. Art mit einem hindurchgehenden Zweig in anderer Richtung.
3. Isolierter Punkt I. Art auf einem gewöhnlichen Kurvenzweig.
4. Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit).

7 Singularitäten:

5 Doppelpunkte: Spitze I. und II. Art, Oskulation, Embrassement und isolierter Punkt II. Art.
1 Dreifacher Punkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten: 2.
1 Dreifacher Punkt mit drei zusammenfallenden Tangenten: 4.

Kurven V. Ordnung.

5 einfache Punkte:

Aufser denjenigen der Kurven IV. Ordnung noch

5. Wendeflachpunkt (point de serpentement compliqué d'inflexion).

16 Doppelpunkte:

Aufser denen der Kurven IV. Ordnung noch

11. Doppelpunkt mit einer Flachpunktstangente (noeud compliqué de serpentement).
12. Doppelpunkt mit zwei Flachpunktstangenten.
13. Isolierter Punkt I. Art mit zwei imag. konj. Flachpunktstangenten.
14. Doppelpunkt mit einer Flachpunkts- und einer Wendetangente.
15. Rückkehrflachpunkt (rebroussement du 2d ordre).
16. Berührung einer konischen und einer I. kubischen Parabel.

21 dreifache Punkte:

Aufser denen der Kurven IV. Ordnung

5. Dreifacher Punkt mit einer Wendetangente.
6. Dreifacher Punkt mit zwei Wendetangenten.
7. Dreifacher Punkt mit drei Wendetangenten.
8. Spitze I. Art mit Wendezweig in anderer Richtung.
9. Isolierter Punkt I. Art mit reeller Wendetangente und zwei konj. gewöhnlichen Tangenten.
10. Isol. Punkt I. Art mit zwei konj. Wendetangenten und einer reellen gewöhnlichen Tangente.
11. Isolierter Punkt I. Art mit zwei konjugierten und einer reellen Wendetangente.
12. Parabolische Selbstberührung von aufsen (Oskulation) mit weiterem einfachen Zweig in anderer Richtung, desgleichen bei
13. Parabolischer Selbstberührung von innen (Embrassement).
14. Oskulation mit einem Wendezweig in anderer Richtung.
15. Embrassement mit einem Wendezweig in anderer Richtung.
16. Isolierter Punkt II. Art auf einem gewöhnlichen Zweig.
17. Isolierter Punkt II. Art mit Wendezweig.
18. Berührung von Spitze I. Art mit konischer Parabel.
19. Spitze II. Art mit weiterem einfachen Zweig in anderer Richtung.
20. Spitze II. Art mit Wendezweig in anderer Richtung.
21. Wendespitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion).

8 vierfache Punkte:

1. Gewöhnlicher vierfacher Punkt (point quadruple).
2. Spitzpunkt mit weiterem Zweig in anderer Richtung, ein scheinbarer gewöhnlicher Doppelpunkt.
3. Doppelpunkt mit Spitze I. Art in Juxtaposition.
4. Doppelpunkt mit isoliertem Punkt I. Art.
5. Spitze I. Art mit isoliertem Punkt I. Art.
6. Zwei Spitzen I. Art in Juxtaposition.
7. Zwei isolierte Punkte I. Art mit verschiedenen Richtungen, ein sog. vierfacher isolierter Punkt I. Art:

$$(x^2 + a^2y^2)(x^2 + b^2y^2) = 0.$$

8. Zwei isolierte Punkte I. Art mit zusammenfallenden Richtungen, ein sog. vierfacher Punkt II. Art:

$$(x^2 + a^2y^2)^2 = 0.$$

9) Rückkehrspitzpunkt (point de triple pointe).

28 Singularitäten:

7 Doppelpunkte:
Aufser denen der Kurven IV. Ordnung noch 15. und 16.

10 dreifache Punkte mit zwei zusammenfallenden Tangenten:
Spitze I. Art mit gewöhnlichem Zweig, ferner 8. 12—17. 19. u. 20.

3 dreifache Punkte mit drei zusammenfallenden Tangenten:
Spitzpunkt, ferner 18. und 21.

Vierfache Punkte:

5 mit zwei zusammenfallenden Tangenten: 3. 4. 5. 6. 7.

1 mit drei . . . . . : 2.

2 mit vier . . . . . : 8. und 9.

Die Anzahl der hier aufgezählten Arten von Punkten weicht, abgesehen von der Schnabelspitze und ihren Kombinationen, von derjenigen, die De Gua angiebt, nur insofern ab, als dieser mehrere aus einer Gleichung sich ergebende Punkte, wie z. B. die äufsere und innere parabolische Selbstberührung u. a. zu einer Spezies zusammenfafst.

Bedingungen für die Existenz ausgezeichneter Punkte der allgemeinen Kurven $n$ter Ordnung im Ursprung und im Unendlichen.

61. Auf Grund der seitherigen Untersuchungen sind nunmehr nach De Gua sämtliche Mittel gegeben, die umgekehrte Aufgabe zu lösen, die Frage nach den Bedingungen zwischen den Koeffizienten einer geg. Gleichung, damit die durch diese Gleichung dargestellte Kurve im Ursprung oder im Unendlichen ein vorgeschriebenes Verhalten aufweist.

a) Im Ursprung: Soll z. B. die vorliegende Kurve

$$f(x, y) = a + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots + f_n(x, y) = 0$$

einen Spitzpunkt daselbst besitzen, so müssen gemäfs 58, g aufser dem konstanten Glied sämtliche Koeffizienten der beiden niedersten Aggregate einzeln verschwinden, zu diesen 6 Bedingungen

$$a = 0, \qquad f_1(x, y) \equiv 0, \qquad f_2(x, y) \equiv 0$$

treten noch, damit $f_3(x, y) = 0$ eine dreifache Wurzel besitzt, die beiden Diskriminanten aus

$$f_3(x, y) = 0, \qquad f_3'(x, y) = 0, \qquad f_3''(x, y) = 0$$

also insgesamt acht Bedingungen.

b) Im Unendlichen: Soll sich daselbst die Kurve z. B. verhalten wie die Parabel des Descartes (vgl. 42, m), so sind die beiden Diskriminanten aus

$$f_n(x, y) = 0, \qquad f_n'(x, y) = 0, \qquad f_n''(x, y) = 0$$

nebst der Resultante von

$$f_{n-1}(x, y) = 0, \qquad f_{n-2}(x, y) = 0$$

und der Bedingung, die man erhält, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel der beiden letzten Gleichungen, die sich bekanntlich aus dem letzten Divisor des De Gua'schen Kettenbruchverfahrens ergiebt, in

$$f_n(x, y) = 0$$

einsetzt, die für die Existenz des vorgeschriebenen Verlaufs der Kurve im Unendlichen notwendigen und hinreichenden vier Bedingungen u. s. w. (vgl. auch 48.).

Analogie zwischen den Kurvenzweigen im Ursprung und im Unendlichen.

62. Die Erkenntnis, dafs die höchsten Terme bezw. Aggregate der nach fallenden Potenzen der Veränderlichen geordneten Kurvengleichung die unendlich fernen Punkte, die niedersten die Punkte im Ursprung charakterisieren, veranlafst De Gua, die Beziehungen zwischen beiden Arten von Punkten näher zu untersuchen.

Das Verhalten einer Kurve im Ursprung kann mit dem Verhalten einer anderen in einem durch seine Richtung gegebenen unendlich fernen Punkt nur unter genau denselben analytischen Voraussetzungen verglichen werden. Den eindeutig durch das Aggregat niederster Ordnung bestimmten Ursprungstangenten müssen daher festliegende Asymptoten entsprechen und da letztere am einfachsten durch den höchsten Term der nach fallenden Potenzen der Ordinate geordneten Kurvengleichung angegeben werden, wenn die Gleichung der Kurve auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, in welchem die Ordinatenaxe in die jeweilige Richtung der Asymptoten drehbar ist, so mufs, wenn einem $k$fachen Punkt der Kurve (I) k Asymptoten einer Kurve (II) derselben Ordnung entsprechen sollen, das niederste Aggregat in (I) mit dem höchsten Term in (II) vom selben Grad k sein, die Gleichungen der beiden Kurven haben somit die Form:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + \cdots + f_{k+1}(x,y) \\ &\quad + (b_k y^k + b_{k-1} y^{k-1} x + \cdots + b_1 y x^{k-1} + b_0 x^k) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \varphi(z, u) &= (a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-2} z + a_k) u^{n-k} \\ &\quad + \varphi_{k+1}(z) u^{n-k-1} + \cdots\cdots + \varphi_{n-1}(z) \cdot u + \varphi_n(z) = 0. \end{aligned}$$

Da sich in beiden Systemen die Ordinatenaxen $x = 0$ bezw. $z = 0$ entsprechen, so tritt für $b_k = 0$ im einen System der Wert $a_k = 0$ im andern, es entsprechen sich somit die Koeffizienten der höchsten Potenzen $\frac{y}{x}$ des

niedersten Aggregats in (I) und diejenigen der niedersten Potenzen des höchsten Terms in (II), insbesondere wird

$$\text{für } b_0 = 0 \text{ entsprechend } a_0 = 0$$

oder

$$\text{für } y = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad z = \infty$$

m. a. W.: Der Ordinaten- bezw. Abscissenaxe als Ursprungstangente in (I) entspricht in (II) eine Asymptote durch den Ursprung bezw. im Unendlichen mit hyperbolischen bezw. parabolischen Ästen. Analog zeigt sich:

a) Haben, den Bedingungen eines Wendepunkts der Kurve (I) im Ursprung entsprechend, die höchsten Terme $\varphi_k(z) = 0$ und $\varphi_{k+1}(z) = 0$ in (II) eine gemeinschaftliche Wurzel $z = 0$, lautet also (II):

$$(\text{II}) \qquad 0 = (z^k + z^{k-1} + \cdots + z)\,u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + z)\,u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + z + 1)\,u^{n-k-2} + \cdots$$

so verhält sich die Kurve (II) in der Richtung der U-Axe wie

$$(\text{III}) \qquad u^{n-k} \cdot z + u^{n-k-2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 z + 1 = 0$$

d. h. wie die auf ein und derselben Seite der U-Axe nach entgegengesetzten Richtungen verlaufenden Zweige der kubischen Hyperbel und da dieser Verlauf der Äste aus demjenigen, durch welchen der gewöhnliche unendlich ferne Punkt der konischen Hyperbel charakterisiert wird, nur so zu erklären ist, dafs ein Zweig der letzteren die Asymptote überschritten hat, so ist der dem Wendepunkt des Ursprungs (I) entsprechende unendlich ferne Punkt in (II) ebenfalls als Wendepunkt zu bezeichnen. Ist insbesondere die Abscissenaxe in (I) Wendetangente, fehlen also die konstanten Glieder in $f_k\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ und $f_{k+1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, so sind entsprechend die höchsten Potenzen in $\varphi_k(z) = 0$ und $\varphi_{k+1}(z) = 0$ gleich Null zu setzen, (II) lautet daher

$$(\text{IIa}) \qquad 0 = (z^{k-1} + \cdots + 1)\,u^{n-k} + (z^k + \cdots + 1)\,u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + 1)\,u^{n-k-2} + \cdots$$

und verhält sich in der Richtung der U-Axe wie

$$(\text{IIIa}) \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-1} + u^{n-k-2} \cdot z^{k+2} = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 + z^3 = 0$$

d. h. wie die unendlich fernen Äste der II. kubischen Parabel. Diesen Verlauf der Aste erhält man, wenn die Asymptote des hyperbolischen Wendepunkts schliefslich ins Unendliche rückt, der unendlich ferne Punkt von (II) ist somit als parabolischer Wendepunkt zu bezeichnen.

b) Ist der Ursprung von (II) ein Flachpunkt, so mufs $z = 0$ auch noch Wurzel von $\varphi_{k+2}(z) = 0$ werden, daher

$$(\text{II}) \quad 0 = (z^k + \cdots + z)\,u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + z)\,u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + z)\,u^{n-k-2} + (z^{k+3} + \cdots + 1)\,u^{n-k-3} + \cdots$$

$$(\text{III}) \qquad u^{n-k} \cdot z + u^{n-3} = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 z + 1 = 0.$$

Die Äste verlaufen somit in der Richtung der U-Axe wieder wie beim gewöhnlichen hyperbolischen Punkt, nur mit stärkerer Annäherung, ganz entsprechend wie der Flachpunkt, abgesehen vom Grad der Krümmung, sich vom gewöhnlichen endlichen Punkt nicht unterscheidet.

Ist wieder in (I) die Abscissenaxe Flachpunktstangente, so lautet (II) entsprechend

$$(\text{IIa}) \qquad 0 = (z^{k-1} + \cdots + 1)\,u^{n-k} + (z^k + \cdots + 1)\,u^{n-k-1} + (z^{k+1} + \cdots + 1)\,u^{n-k-2} + (z^{k+3} + \cdots + 1)\,u^{n-k-3} + \cdots$$

$$(\text{IIIa}) \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-1} + u^{n-k-3} \cdot z^{k+3} = 0 \quad \text{oder} \quad u^3 + z^4 = 0$$

d. h. die Kurve verläuft in der Richtung der U-Axe wie die Spitzpunktsparabel, also, vom Grad der Krümmung abgesehen, in derselben Art wie die Zweige der konischen Parabel.

Der unendlich ferne Punkt ist somit in beiden Fällen als Flachpunkt zu bezeichnen.

c) Den Bedingungen einer Spitze I. Art im Ursprung der Kurve (I) entsprechend hat der höchste Term in (II) die Doppelwurzel $z = 0$, daher

$$(\text{II}) \qquad 0 = (z^k + \cdots + z^2)\,u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + 1)\,u^{n-k-1} + \cdots$$

Annäherung:

$$(\text{III}) \qquad u^{n-k} \cdot z^2 + u^{n-k-1} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0.$$

Die Äste erstrecken sich somit zu beiden Seiten der U-Axe in derselben Richtung, also einer unendlich fernen Spitze I. Art zu.

Wenn die Abscissenaxe Rückkehrtangente in (I) ist, so lautet (II)

$$(\text{IIa}) \qquad 0 = (z^{k-2} + z^{k-3} + \cdots + 1)\,u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + 1)\,u^{n-k-1} + \cdots$$

Annäherung:

$$(\text{IIIa}) \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-2} + u^{n-k-1} \cdot z^{k+1} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

Die Äste verlaufen somit in der Richtung der U-Axe nach Art der I. kubischen Parabel, der unendlich ferne Punkt ist sonach eine parabolische Spitze I. Art, da, verglichen mit dem parabolischen Wendepunkt a), der zweite Ast aus der entgegengesetzten Richtung wie dort sich der unendlich fernen Asymptote nähert, u. s. w.

Setzt man diese Betrachtungen fort, so bestätigt sich durchweg der

Satz: Dieselben Kriterien, welche die verschiedenen einfachen, mehrfachen und singulären Punkte im Ursprung, überhaupt im Endlichen, charakterisieren, charakterisieren auch die unendlich fernen hyperbolischen und parabolischen Punkte als ebensolche einfache, mehrfache und singuläre Punkte, nur beziehen sich jene Kriterien im ersten Fall auf die niedersten Aggregate, im letzten Fall auf die höchsten Terme der Kurvengleichung.

Für die Beurteilung gleichartiger endlicher und unendlich ferner Punkte besteht somit merkwürdigerweise eine Wechselbeziehung zwischen Aggregaten und Termen, d. h. zwischen ungleichartigen Ausdrücken bezüglich der Ordnung der Kurvengleichung nach ihren Variabeln.

63. Um somit die Singularität einer Kurve im Ursprung ins Unendliche zu verlegen, ist algebraisch die Aufgabe zu lösen, die Gleichung der Kurve so umzuformen, dafs die höchsten Aggregate zu niedersten Termen werden und umgekehrt. Dies erreicht De Gua durch die Transformation

$$x = \frac{1}{z} \qquad y = \frac{u}{z},$$

womit z. B. die Gleichung dritten Grads

(I) $$f(x, y) = \begin{array}{ccccc} & & hy^3 & ixy^2 & kx^2y & lx^3 \\ & & ey^2 & fxy & gx^2 & \\ & & by & cx & & \\ & & a & & & \end{array} = 0$$

übergeht in

(II) $$\varphi(z, u) = \begin{array}{ccccc} & & hu^3 & eu^2z & buz^2 & az^3 \\ & & iu^2 & fuz & cz^2 & \\ & & ku & gz & & \\ & & l & & & \end{array} = 0$$

welche Gleichung auf das analytische Dreieck gelegt zeigt, dafs letzteres in Bezug auf (I) eine Drehung erlitten hat, indem die Ecken a und l sich vertauscht haben (vgl. 12.), und dafs dadurch die horizontalen Reihen in (I), welche die Aggregate darstellen, zu linksseitigen Parallelreihen geworden sind, welche die Terme angeben, genauer: Gleichung (II) hat nach Aggregaten (z, u) geordnet die niedersten Terme (y) zu höchsten Aggregaten, nach z geordnet die höchsten Aggregate (x, y) zu niedersten Termen (u) und nach u geordnet die Terme der nach y geordneten Gleichung (I) in derselben Folge zu Termen, nnr dafs die höheren Glieder dieser Terme (I) die niederen Glieder der entsprechenden Terme (II) bilden, so dafs hyperbolische Zweige von (I), die in der Richtung der Ordinatenaxe verlaufen, in parabolische Zweige von (II) mit derselben Richtung übergehen und umgekehrt.

64. Aber auch geometrisch findet De Gua eine Erklärung für die oben ausgesprochene Übereinstimmung endlicher und unendlich ferner Punkte, auf Grund der von Newton erstmals aufgefundenen Methode der Erzeugung der Kurven durch Abbildung (Genesis curvarum per umbras, vgl. 12.) und es gelingt ihm, die algebraische Transformation durch perspektive Betrachtungen, wie folgt, zu interpretieren (Fig. 60):

Legt man durch einen bel. Punkt S, das sog. Projektionszentrum, die Parallelebenen zur Ebene Σ der geg. Kurve und zur Projektionsebene Φ, auf welche die geg. Kurve durch Strahlen von S aus abgebildet werden soll, so schneiden diese Ebenen die geg. Ebenen Φ und Σ nach zwei zur Schnittgeraden letzterer parallelen Geraden g und f, von welchen erstere das Bild der unendlich fernen Geraden in Σ, letztere dasjenige der unendlich fernen Geraden von Φ darstellt. Wählt man daher den Ursprung der geg. Kurve auf f, etwa als den Fufspunkt des von S auf f gefällten Lotes $SO = p$, nimmt man ferner die Gerade f zur Ordinatenaxe, die Projektion von p auf Σ zur Abscissenaxe und entsprechend in der Bildebene Φ die Gerade g zur U- und die Projektion der X-Axe zur Z-Axe, so bildet sich der Ursprung O der geg. Kurve als unendlich ferner Punkt der Kurve Φ und jeder ihrer unendlich fernen Punkte als Punkt der Ordinatenaxe U ab und es ist, wenn der projizierende Strahl SP des Kurvenpunkts P die Bildebene in P' trifft, die Ordinate $PB = y$ parallel der Ordinate $P'B' = u$ des Bildpunkts P'. Daher, wenn $SM = q$ die Entfernung des Projektionsmittelpunkts von der U-Axe bezw. vom Ursprung M der Projektionskurve bezeichnet,

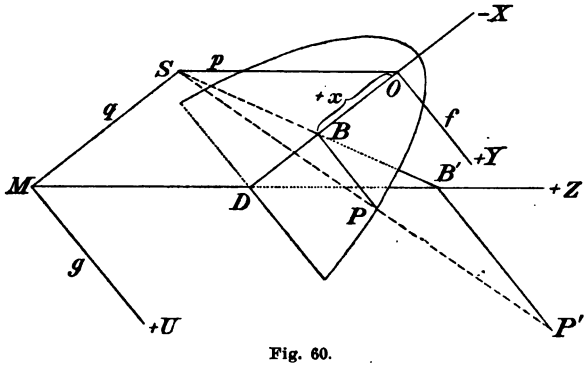

Fig. 60.

aus $\triangle SBO \sim \triangle DBB'$: $\quad \frac{BO}{BD} = \frac{SO}{DB'}$,

woraus

$$\frac{BO}{BO + BD} = \frac{SO}{SO + DB'} \quad \text{oder} \quad \frac{BO}{DO} = \frac{SO}{MB'}$$

d. h.

$$(1) \qquad \frac{x}{q} = \frac{p}{z} \qquad \text{oder} \qquad x = pq \cdot \frac{1}{z}$$

aus $\triangle SBP \sim \triangle SB'P'$: $\quad \frac{BP}{B'P'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{OB}{OD} = \frac{SO}{MB'}$

oder

$$(2) \qquad \frac{y}{u} = \frac{p}{z} \qquad \text{oder} \qquad y = p \cdot \frac{u}{z}$$

Hiermit beweist De Gua erstmals, wenn auch zunächst noch in einem Sonderfall, daſs lineare Transformation und projektive Abbildung identisch sind d. h. daſs die Überführung der Gleichung einer Kurve durch lineare Transformation in eine andere Form gleichbedeutend ist mit der Abbildung der Kurve durch Zentralperspektive in eine andere Ebene des Raums. Da diese Art der Abbildung eindeutig ist d. h. da jedem Punkt der ursprünglichen Kurve auch nur ein einziger Punkt des Bildes zugeordnet ist und somit die Zahl der Schnittpunkte einer Kurve und einer Geraden auch in der Abbildung erhalten bleibt, so ändern sich die projektiven Eigenschaften der Kurven d. h. diejenigen, die durch Projektion nicht verloren gehen, also insbesondere die Eigenschaften der mehrfachen und singulären Punkte sowie die Ordnung der Kurve auch durch lineare Transformation nicht; nicht zu den projektiven Eigenschaften dagegen gehört die Mittelpunktseigenschaft (vgl. 30.), die somit auch durch lineare Transformation (wo im allgemeinen nur Doppelverhältnisse, nicht aber einfache übertragen werden) verloren geht ebenso wie die ursprüngliche Lage des Koordinatensystems. Zugleich folgt, daſs zwei durch lineare Transformation auf einander bezogene Kurven stets im Raum in zentralperspektive Lage gebracht werden können.

65. Auf Grund dieser Ergebnisse ersetzt De Gua behufs Untersuchung des Verlaufs der Zweige unendlich ferner mehrfacher und singulärer Punkte die ursprünglich angewandte lineare Transformation (vgl. 63. bezw. 62.) durch das bequemere Hilfsmittel der projektiven Abbildung. Den Schritt zur Einführung homogener Koordinaten, die für diese Untersuchungen ein noch einfacheres Hilfsmittel abgegeben hätten, macht De Gua nicht, obwohl einerseits die Betrachtung des analytischen Dreiecks wegen der Vertauschung zweier Dreiecksseiten (vgl. 63, I und II) zur Einführung der dritten Seite des Dreiecks als neuer Koordinatenaxe, also auch zur Einführung einer dritten Variabeln, Veranlassung bieten, andererseits das bei linearer Transformation stattfindende Auftreten gleicher Nenner, durch deren Fortschaffung sogar zuvor konstante Glieder mit Variabeln behaftet werden, den Gedanken der Einführung eines Proportionalitätsfaktors d. h. einer dritten Variabeln nahe legen konnte (vgl. 12.).

66. Beachtet man, daſs jeder Punkt eines Quadranten der Ebene Σ sich eindeutig in den entsprechenden Quadranten der Projektionsebene Φ abbildet und daſs gemäſs dem Hauptgesetz der Zentralperspektive entsprechende Geraden beider Ebenen sich in der Schnittgeraden letzterer treffen,

daſs ferner jeder Zweig der Kurve Σ, wenn er die Ordinatenaxe f schneidet, sich abbildet mit der Projektion der in jenem Schnittpunkt an den Zweig Σ gezogenen Tangente als Asymptote, welch letztere, falls der Zweig Σ die Ordinatenaxe selbst berührt, ins Unendliche rückt und den Verlauf der Bildkurve parabolisch gestaltet, so ergeben sich durch Projektion der auf f angenommenen mehrfachen und singulären Punkte die in 62. analytisch definierten Gestalten der Zweige der entsprechend gleichbenannten unendlich fernen hyperbolischen und parabolischen Punkte, abgesehen vom Grad der Krümmung, wie folgt, wenn

a) Die Ordinatenaxe f nicht Tangente in Σ:

1. Hyperbolische gewöhnliche Punkte: Ovalpunkt, Flach-, Spitzpunkt (vgl. 22.) mit Ästen nach Art der konischen Hyperbel.
2. Hyperbolische Wendepunkte: Wende-, Wendeflach-, Wendespitzpunkt (vgl. 23.) mit Ästen nach Art der kubischen Hyperbel auf derselben Seite der Asymptote (Abscissenaxe) nach entgegengesetzten Richtungen.
3. Hyperbolische Rückkehrpunkte: Spitze I. Art, Rückkehrflach-, Rückkehrspitzpunkt (vgl. 24.) mit Ästen nach Art der kubischen Hyperbel auf verschiedenen Seiten der Asymptote (Ordinatenaxe) nach derselben Richtung.
4. Hyperbolische mehrfache Punkte: Ein System von ebensoviel parallelen getrennten bezw. zusammenfallenden Asymptoten als die Vielfachheit angiebt mit ebensoviel hyperbolischen gewöhnlichen Punkten, Wende- und Rückkehrpunkten als der entsprechende endliche mehrfache Punkt derartige Zweige besitzt, z. B. besteht die hyperbolische Oskulation (vgl. 52.) aus vier beiderseitig den Enden einer Asymptote zustrebenden Ästen (Fig. 61) und kann daher ebensowohl durch Vereinigung zweier hyperbolischer Spitzen I. Art als zweier hyperbolischer Wendepunkte entstanden gedacht werden, das hyperbolische Embrassement ist dargestellt durch zwei Paare hyperbolischer Zweige, die auf entgegengesetzten Seiten einer Asymptote entgegengesetzten Richtungen zustreben (Fig. 62), während ein solches Paar allein die hyperbolische Schnabelspitze darstellen würde (Fig. 63).

Fig. 61.

Fig. 62.

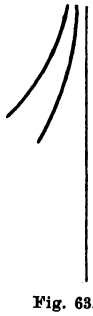
Fig. 63.

5. Hyperbolische isolierte Punkte: Ein System paralleler Asymptoten in imaginärer Entfernung vom Ursprung u. s. f.

b) Die Ordinatenaxe f ist Tangente in Σ:

1. Parabolische gewöhnliche Punkte: Äste wie bei der konischen Parabel.
2. Parabolische Wendepunkte: Äste wie bei der II. kubischen Parabel.
3. Parabolische Rückkehrpunkte: Äste wie bei der I. kubischen Parabel.
4. Parabolische Oskulation bezw. Embrassement: Vier Äste nach Art zweier sich die konvexe Scheitelseite zukehrender bezw. zweier parallel gestellter konischer Parabeln (Fig. 64, 65) u. s. f.

c) Liegt umgekehrt auf der Ordinatenaxe f ein hyperbolischer bezw.

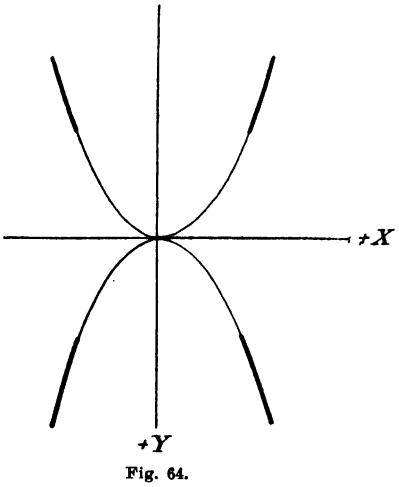

Fig. 64.

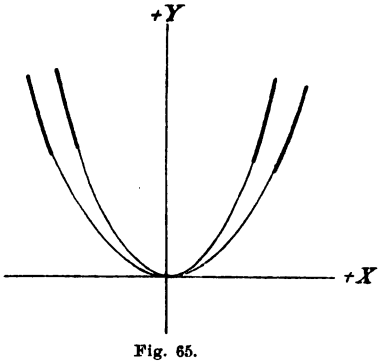

Fig. 65.

parabolischer Punkt, so projiziert sich dieser auf die Bildebene als der entsprechende parabolische bezw. hyperbolische Punkt u. s. w.

67. De Gua hat somit erstmals gemäfs den Ausführungen 62. bis 66. die streng analytisch und synthetisch begründete heutige Auffassung der Identität der unendlich fernen und der endlichen Punkte d. h. dafs die unendlich fernen Äste einer algebraischen Kurve stets paarweise auftreten und sich in den unendlich fernen Punkten genau in derselben Weise vereinigen wie die in einem endlichen Punkt zusammentreffenden Teile eines Zweigs. Diese ganz hervorragende Leistung, durch welche De Gua die bis dahin bestandene Ausnahmestellung der unendlich fernen Punkte beseitigt, bereichert er noch um zwei auf die gestaltlichen Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung bezügliche interessante Anwendungen der projektiven Abbildung, welches Verfahren sich ihm als ein ausgezeichnetes Mittel darbietet, Eigenschaften einer Kurve aus dem Unendlichen ins Endliche und umgekehrt zu übertragen: De Gua giebt den ersten rein synthetischen Beweis der Newton'schen Genesis curvarum tertii ordinis per umbras und entdeckt den klassischen Satz über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung.

Abbildung der Kurven dritter Ordnung nach De Gua.

68. Untersucht man die von Newton aufgestellten Figuren der Kurven dritter Ordnung auf ihre Wendepunkte, so zeigt sich, dafs mit Ausnahme zweier der fünf divergenten kubischen Parabeln, nämlich der Spitze I. Art und des Folium des Descartes, sämtliche Arten dieser Kurven, falls sie nicht einen Wendepunkt im Endlichen besitzen, als Ersatz hierfür einen hyperbolischen Punkt aufweisen, dessen Äste auf derselben Seite der Asymptote nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen, d. h. einen hyperbolischen Wendepunkt, von Newton noch als „branches hyperboliques à diamètres" bezeichnet (vgl. 29), da die Parallelsehnen zur Asymptote die Kurven nur noch in zwei Punkten schneiden, der zugehörige Durchmesser sich somit wie bei den Kegelschnitten bestimmt. Nimmt man also, da die fünf divergenten Parabeln die einzigen Kurven dritter Ordnung sind, die parabolische Wendepunkte besitzen, die Ordinatenaxe f' (Fig. 60) zur Wendeasymptote bezw. Wendetangente der abzubildenden Kurven, so entsteht durch Projektion stets eine der fünf divergenten Parabeln, umgekehrt erzeugen letztere durch ihre Projektion sämtliche Kurven dritter Ordnung.

Satz von De Gua über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung.

69. Auf Grund des Newton'schen Satzes: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendasymptoten, so mufs sie noch eine dritte haben (vgl. 29), ergiebt sich durch zentralprojektive Abbildung der diese drei unendlich fernen hyperbolischen Wendepunkte verbindenden unendlich fernen Geraden ins Endliche (Fig. 60) der

Satz von De Gua: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendepunkte im Endlichen, so besitzt sie stets noch einen dritten, der mit den beiden ersten auf einer Geraden liegt.

70. Aufser diesem synthetischen Beweis findet sich Usages, pag. 314, ein analytischer

Erster Beweis von De Gua (1740):

Wählt man den einen der drei Wendepunkte zum Ursprung und die ihn mit dem zweiten Wendepunkt $(0, a)$ verbindende Gerade zur Ordinatenaxe Y, so trifft diese die Kurve dritter Ordnung noch in einem dritten Punkt $(0, b)$ und die Gleichung der Kurve lautet demnach für $x = 0$

$$y(y-a)(y-b) \equiv y^3 - (a+b)y^2 + aby = 0\,.$$

Ist somit c^2 der Koeffizient des linearen Gliedes in x, also $aby - c^2x$ das niederste Aggregat der nach beiden Variabeln geordneten Kurvengleichung, so mufs, da der Ursprung Wendepunkt sein soll, die aus diesem Aggregat sich

ergebende Wurzel $y = \frac{c^2}{ab} x$ Faktor des nächst höheren Aggregats der Kurvengleichung sein (vgl. 56); letzteres lautet daher, wenn wegen des Koeffizienten $(a+b)$ von y^2 der andere lineare Faktor zu $(a+b)y - rx$ genommen wird

$$-((a+b)y - rx)\left(y - \frac{c^2}{ab}x\right) \equiv -(a+b)y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2$$

und da die Koeffizienten des höchsten Aggregats bis auf denjenigen von y^3, der zu 1 angenommen wurde, beliebig gewählt werden können, so hat die Gleichung der Kurve dritter Ordnung mit einem Wendepunkt im Ursprung die Form

$$(1)\quad f(x,y) = y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 - (a+b)y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2 + aby - c^2x = 0.$$

Soll der Schnittpunkt $(0, a)$ der Kurve mit der Y-Axe ebenfalls Wendepunkt sein, so ist die Bedingung hierfür, dafs die beiden niedersten Aggregate der in diesen Punkt als Ursprung transformierten Kurvengleichung eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Nach dem Taylor'schen Satz erhält man, indem man x konstant und y veränderlich, also $dx = 0$ und $dy = a$ nimmt, die transformierte Gleichung in der Form:

$$(2)\quad f(x,y+dy) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 = F(x,y),$$

wo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ab - 2(a+b)y + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)x + 3y^2 + 2fxy + gx^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(a+b) + 6y + 2fx$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6,$$

somit

$$\begin{aligned} F(x,y) = {} & aby - c^2x - (a+b)y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2 \\ & + y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 \\ & + a^2b - 2a(a+b)y + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)x + 3ay^2 + 2afxy + agx^2 \\ & + a^2fx + 3a^2y - (a+b)a^2 + a^3, \end{aligned}$$

oder nach Aggregaten geordnet

$$\begin{aligned} (3)\quad F(x,y) = {} & (a^2 - ab)y + \left(a^2f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x \\ & + (2a-b)y^2 + \left(r^2 + 2af + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{ab}\right)x^2 \\ & + y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 \end{aligned}$$

und daher nach der Methode der Staffelrechnung:

$$(a^2-ab)y+\left(a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x \text{ geht in}$$

$$\left|\begin{matrix}(2a-b)y^2+\left(r^2+2af+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy+\left(ag-\frac{rc^2}{ab}\right)x^2 \\ (2a-b)y^2+\frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)xy\end{matrix}\right| \begin{matrix}\frac{2a-b}{a(a-b)}y+\frac{\{\cdots\}}{a^2-ab}x \\ \end{matrix}$$

$$\left\{r+2af+\frac{c^2(a+b)}{ab}-\frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)\right\}xy+\left(ag-\frac{rc^2}{ab}\right)x^2$$

$$\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}xy+\frac{\{\cdots\}}{a^2-ab}\cdot\left(a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x^2$$

somit der Rest

$$(4)\quad ag-\frac{rc^2}{ab}-\frac{1}{a^2-ab}\left\{r+2af+\frac{c^2(a+b)}{ab}-\frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)\right\}\cdot\left[a^2f-c^2+a\left(r+\frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right]=0$$

die Bedingung, dafs der Schnittpunkt $(0, a)$ der Kurve (1) mit der Y-Axe Wendepunkt ist. Formt man die Klammerfaktoren in (4) um, so findet man

$$\{\cdots\cdots\}=-\frac{c^2(a^2-ab+b^2)+a^2f(r+bf)}{ab(a-b)}$$

$$[\cdots\cdots]=\frac{a(abf+br+c^2)}{b}$$

und (4) geht über in

$$\begin{aligned}0&=ag-\frac{rc^2}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}\cdot\frac{c^2(a^2-ab+b^2)+a^2b(r+bf)}{b(a-b)}\cdot\frac{c^2+b(r+af)}{b}\\&=(a^2b^2g-bc^2r)(a-b)^2+[c^2(a^2-ab+b^2)+a^2b(r+bf)]\\&\qquad\cdot[c^2+b(r+af)]\\&=a^2b^2(a-b)^2g\\&\qquad-c^2[(a-b)^2br-(bf+r)a^2b-(af+r)(a^2-ab+b^2)b]\\&\qquad+c^4(a^2-ab+b^2)+a^2b^2(af+r)(bf+r)\end{aligned}$$

$$(4a)\quad 0=a^2b^2(g(a-b)^2+(af+r)(bf+r))+c^2\cdot ab((af+r)a+(bf+r)b)+c^4(a^2-ab+b^2).$$

Da diese Bedingungsgleichung für den Wendepunkt $(0, a)$ sich nicht ändert, wenn a mit b vertauscht wird, so hätte man (4a) auch erhalten, wenn man Gleichung (1) statt nach $(0, a)$ nach $(0, b)$ transformiert und für letzteren Punkt die Bedingung des Wendepunkts aufgestellt hätte, d. h. auch der dritte Schnittpunkt der Ordinatenaxe und der Kurve ist ein Wendepunkt q. e. d.

Sonderfälle: Liegt der dritte Schnittpunkt $(0, b)$ im Unendlichen, so fehlt die höchste Potenz y^3 in der Gleichung der Kurve dritter Ordnung,

letztere kann daher in diesem Fall für $x = 0$ in der Form genommen werden

$$-a(y-a)y \equiv -ay^2 + a^2y = 0.$$

Ist c^2 der Koeffizient des linearen Gliedes x, so mufs wieder, weil der Ursprung Wendepunkt sein soll, die Wurzel $y = \frac{c^2}{a^2}x$ des niedersten Aggregats Faktor des nächst höheren sein; ist daher der andere lineare Faktor $ay - rx$, so lautet das Aggregat der Glieder zweiter Dimension

$$-(ay-rx)\left(y - \frac{c^2}{a^2}x\right) \equiv -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a}x^2,$$

dann bestehen noch zwei Möglichkeiten, entweder der unendlich ferne Schnittpunkt ist parabolischer oder er ist hyperbolischer Art:

Erster Fall: Wird das Aggregat der Glieder dritter Dimension zu $fxy^2 + gx^2y + hx^3$ genommen, so folgt, da der Term $fx - a = 0$ der höchsten Potenz y^2 der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung die zur Ordinatenaxe parallele Asymptote $x = \frac{a}{f}$ ergiebt, letztere aber für diesen Fall ins Unendliche rückt, dafs $f = 0$, d. h. dafs das Glied fxy^2 in der Gleichung der Kurve fehlt. Diese lautet daher

$$(1\,a)\quad f(x,y) = gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0,$$

woraus, wenn wieder in den Schnittpunkt $(0, a)$ transformiert wird,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = gx^2 - 2ay + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)x + a^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

und somit die transformierte Gleichung

$$(2\,a)\quad F(x,y) = gx^2y + x^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 - a^2y + arx = 0,$$

woraus die Bedingung, dafs dieser neue Ursprung $(0, a)$ Wendepunkt ist, mittels der Staffelrechnung

$$\begin{array}{l|l|l} -a^2y + arx & -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 & \frac{1}{a}y - \frac{c^2}{a^3}x \\ \hline & -ay^2 + r \cdot xy & \\ \hline & \frac{c^2}{a}xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 & \\ & \frac{c^2}{a}xy - \quad \frac{c^2r}{a^2} \cdot x^2 & \\ \hline \text{als Rest:} & agx^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad g = 0, & \end{array}$$

hiermit geht (1 a) über in

$$(1^*)\qquad 0 = hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0$$

Die Kurve verhält sich also im Unendlichen, gemäfs dem analytischen Dreieck, wie die zweite kubische Parabel

$$hx^3 - ay^2 = 0,$$

sie hat also im unendlich fernen Punkt der Y-Axe einen parabolischen Wendepunkt q. e. d.

Zweiter Fall: Transformiert man die Gleichung der Kurve

$$(1\,b)\quad f(x,y) = fxy^2 + gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0$$

wieder in den neuen Ursprung $(0, a)$ mittels

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2fxy + gx^2 - 2ay + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)x + a^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2fx - 2a,$$

so erhält man

$$F(x,y) = fxy^2 + gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a} + 2af\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 - a^2y + a(r + af)x$$

und die Bedingung, dafs $(0, a)$ ein Wendepunkt ist, ergiebt sich aus

$$-a^2y + (r+af)x \Big| \begin{matrix} -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a} + 2af\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 \\ -ay^2 \qquad + (r+af)xy \end{matrix} \Big| \frac{1}{a}y - \frac{1}{a^2}\left(\frac{c^2}{a} + af\right)x$$

$$\left(\frac{c^2}{a} + af\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2$$
$$\left(\frac{c^2}{a} + af\right)xy - \frac{1}{a}(r+af)\left(\frac{c^2}{a} + af\right)x^2$$

als Rest: $$\left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right) + \frac{1}{a}(r+af)\left(\frac{c^2}{a} + af\right) = 0,$$

oder

$$(2\,b)\qquad a^2(f^2 + g) + f(ar + c^2) = 0.$$

Um die Art des unendlich fernen Punktes der Ordinatenaxe zu untersuchen, macht man die Asymptote $x = \frac{a}{f}$ zur neuen Ordinatenaxe, transformiert also (1 b) in Bezug auf den neuen Ursprung $\left(\frac{a}{f}, 0\right)$, wobei diesmal x veränderlich und y konstant, also $dx = \frac{a}{f}$ und $dy = 0$ zu nehmen ist, dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy^2 + 2gxy + 3hx^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)y - \frac{2rc^2}{a^2}x - c^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2gy + 6hx - \frac{2rc^2}{a^2}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6h,$$

somit lautet die transformierte Gleichung

$$(1^{**}) \quad F(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3$$

$$= fxy^2 + gx^2y + hx^3 + \left(r + \frac{c^2}{a} + \frac{2ag}{f}\right)xy - \left(\frac{rc^2}{a^2} + \frac{3ah}{f}\right)x^2$$

$$+ \frac{a^2(f^2+g) + f(ar+c^2)}{f^2}y - \frac{2c^2f^2r - 3a^3h}{af^3}x$$

$$+ \frac{a^3h + c^2f(a^2f+r)}{f^3} = 0.$$

Infolge der Bedingung (2b) verschwindet somit das in y lineare Glied, die Kurve verhält sich daher, weil auch das Glied ay^2 fehlt, in der Richtung der neuen Ordinatenaxe, gemäfs dem analytischen Dreieck, wie die kubische Hyperbel

$$xy^2 + \frac{a^3h + c^2f(a^2f+r)}{f^4} = 0,$$

der unendlich ferne Punkt der alten Ordinatenaxe ist somit ein hyperbolischer Wendepunkt unter der Bedingung, dafs die beiden anderen Schnittpunkte der Kurve mit der Ordinatenaxe ebenfalls Wendepunkte sind q. e. d.

Hiermit sind sämtliche Sonderfälle des Hauptsatzes über die Lage dreier Wendepunkte direkt bewiesen, denn der weitere Fall, zwei Wendepunkte im Unendlichen und der dritte im Endlichen, besteht nicht, es müssen alsdann alle drei Wendepunkte im Unendlichen liegen (vgl. 29).

71. Des geschichtlichen Interesses wegen sei hier angeschlossen der acht Jahre später erschienene, mit Hilfe der Differentialrechnung geführte

Beweis von Mac Laurin (1748):

Sind $y_1 = FP$, $y_2 = FQ$, $y_3 = FR$ die zu irgend einer Abscisse $OF = x$

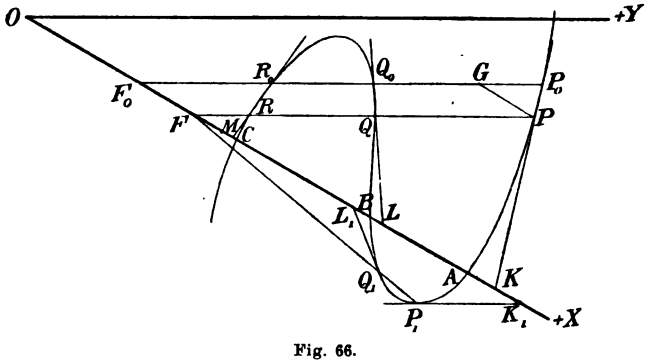

Fig. 66.

gehörigen Ordinaten der auf schiefwinkliges System bezogenen Kurve dritter Ordnung (Fig. 66)

$$y^3 + (ax+b)y^2 + (cx^2 + ex + f)y + (gx^3 + hx^2 + kx + l) = 0$$

und $x_1 = OA$, $x_2 = OB$, $x_3 = OC$ die Abscissen der aus

$$gx^3 + hx^2 + kx + l = 0$$

sich ergebenden Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, so ist gemäfs 49.

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = g(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

oder

$$FP \cdot FQ \cdot FR = g \cdot FA \cdot FB \cdot FC,$$

woraus durch Logarithmieren und Differenzieren mit Beachtung, dafs g eine Konstante ist

$$\log FP + \log FQ + \log FR = \log g + \log FA + \log FB + \log FC$$

$$(1) \qquad \frac{dFP}{FP} + \frac{dFQ}{FQ} + \frac{dFR}{FR} = \frac{dFA}{FA} + \frac{dFB}{FB} + \frac{dFC}{FC}.$$

Ändert man die Richtung der Ordinatenaxe, so dafs nunmehr FP_1, FQ_1. FR_1 die zu $OF = x$ gehörigen Ordinaten sind, so ist wie oben

$$FP_1 \cdot FQ_1 \cdot FR_1 = g_1 \cdot FA \cdot FB \cdot FC$$

und daher

$$(2) \qquad \frac{dFP_1}{FP_1} + \frac{dFQ_1}{FQ} + \frac{dFR_1}{FR_1} = \frac{dFA}{FA} + \frac{dFB}{FB} + \frac{dFC}{FC}$$

und somit aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \frac{dFP}{FP} + \frac{dFQ}{FQ} + \frac{dFR}{FR} = \frac{dFP_1}{FP_1} + \frac{dFQ_1}{FQ_1} + \frac{dFR_1}{FR_1}.$$

Läfst man $OF = x$ um das Differential $dx = dOF = FF_0$ wachsen oder, wie die Figur zeigt, abnehmen, und zieht durch F_0 die zur Ordinate FP unendlich benachbarte parallele Ordinate, welche die Kurve in den zu P, Q, R unendlich benachbarten Punkten P_0, Q_0, R_0 schneidet, so dafs PP_0, QQ_0, RR_0 als die unendlich kleinen Sehnen betrachtet werden können, durch deren Verlängerung die Tangenten PK, QL, RM der Kurvenpunkte P, Q, R entstehen, so ist, wenn $PG \parallel FF_0$ gezogen wird

$$F_0G = PF = y \qquad \text{also} \qquad P_0G = dy = dPF$$

und somit

$$\frac{P_0G}{PG} = \frac{PF}{KF} \quad \text{oder} \quad \frac{P_0G}{PF} = \frac{PG}{KF} \quad \text{oder} \quad \frac{dPF}{PF} = \frac{dOF}{KF}.$$

Führt man diese Betrachtung an sämtlichen sechs Kurvenschnittpunkten der Geraden FP und FP_1 durch, so erhält man

$$\frac{dFP}{FP} = \frac{dOF}{FK} \qquad \frac{dFP_1}{FP_1} = \frac{dOF}{FK_1}$$

$$\frac{dFQ}{FQ} = \frac{dOF}{FL} \qquad \frac{dFQ_1}{FQ_1} = \frac{dOF}{FL_1}$$

$$\frac{dFR}{FR} = \frac{dOF}{FM} \qquad \frac{dFR_1}{FR_1} = \frac{dOF}{FM_1},$$

wo K_1, L_1, M_1 die Schnittpunkte von OF mit den in P_1, Q_1, R_1 gezogenen Tangenten sind, und hieraus durch Addition unter Berücksichtigung von (3)

$$\frac{1}{FK} + \frac{1}{FL} + \frac{1}{FM} = \frac{1}{FK_1} + \frac{1}{FL_1} + \frac{1}{FM_1}. \tag{4}$$

Läfst man die Gerade FP_1 sich drehen bis sie mit FO zusammenfällt, dann wird

$$FK_1 = FA, \qquad FL_1 = FB, \qquad FM_1 = FC$$

und

$$\frac{1}{FK} + \frac{1}{FL} + \frac{1}{FM} = \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} + \frac{1}{FC} \tag{5}$$

somit, da sowohl das Axensystem als auch die Abscisse OF beliebig gewählt wurden und diese Betrachtung sich für jede algebraische Kurve in derselben Weise durchführen läfst,

Satz von Mac Laurin: Zieht man von einem beliebigen festen Punkt (F) auf einer, eine algebraische Kurve n ter Ordnung in n Punkten schneidenden festen Geraden (OF) beliebige Transversalen, welche die Kurve in ebensoviel Punkten schneiden, so ist die Summe der reziproken Werte der auf der festen Geraden vom festen Punkt aus gemessenen Abschnitte, die durch die Tangenten in den Kurvenschnittpunkten einer solchen Transversale erzeugt werden, konstant, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der auf der festen Geraden durch die Kurvenschnittpunkte einerseits und den festen Punkt andererseits begrenzten Strecken.

Oder, da die Summe der reziproken Werte von n Strecken durch die Anzahl der Strecken dividiert, das harmonische Mittel der Strecken darstellt, hier aber die Anzahl der Strecken stets dieselbe ist, so kann man auch sagen: Das harmonische Mittel aus den auf der festen Geraden durch die Tangenten in den Schnittpunkten der Transversalen einerseits und dem festen Punkt der Geraden andererseits begrenzten Abschnitte ist konstant.

Dieser Satz von Mac Laurin ist die Verallgemeinerung der zweiten allgemeinen Eigenschaft sämtlicher algebraischer Kurven, die Newton in der Enumeratio aufführt. Sie betrifft die Asymptoten und lautet:

Hat eine Kurve n ter Ordnung n Asymptoten, so sind die arithmetischen Mittel aus den Abschnitten, welche einerseits durch die Asymptoten andererseits durch die Kurve auf einer beliebigen Geraden abgeschnitten werden, gleich, m. a. W.: Die Summen der von den n Asymptoten und ihren zugehörigen Kurvenzweigen begrenzten Abschnitte einer eine Kurve n ter Ordnung in n Punkten schneidenden Geraden sind bezüglich des Schnittpunkts dieser Geraden mit ihrem zugehörigen Durchmesser auf beiden Seiten der Geraden gleich (vgl. hiermit den Sonderfall der konischen Hyperbel).

Da jede der Tangenten PK, QL, RM die Kurve dritter Ordnung in

einem weiteren Punkt U, V, W schneidet, so ist in dem besonderen Fall, wenn die Verbindungsgerade UV zweier dieser Schnittpunkte, als feste Gerade betrachtet, die beliebig gewählte FP in S, die dritte Tangente RM in W' und die Kurve in dem weiteren Schnittpunkt W'' trifft, nach dem Satz von Mac Laurin

$$\frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW'} = \frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW''}$$

somit

$$SW' = SW''$$

d. h. es fällt W' und somit auch W mit dem Kurvenpunkt W'' zusammen; die Schnittpunkte U, V, W der Kurve mit den in P, Q, R gezogenen Tangenten liegen somit in einer Geraden und man erhält den weiteren

Satz: Zieht man in den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit einer Kurve dritter Ordnung die Tangenten, so liegen deren Schnittpunkte mit der Kurve ebenfalls in einer Geraden.

Fallen die Schnittpunkte U, V, W der Tangenten mit den jeweiligen Berührungspunkten P, Q, R zusammen, werden also P, Q, R zu Wendepunkten, so deckt sich die Gerade UVW mit der Geraden PQR d. h. die drei Wendepunkte liegen in einer Geraden.

72. *Dritter Beweis mittels des Schnittpunktrestsatzes.*

Ordnet man die vollständige Gleichung einer algebraischen Kurve $n$ter Ordnung nach steigenden Aggregaten beider Veränderlichen, so ist die Anzahl sämtlicher Glieder der Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Da die Gestalt der Kurve von den Koeffizienten der Glieder abhängt, aber durch Division der Gleichung mit einem der Koeffizienten, meist demjenigen der höchsten Potenz einer der Variabeln, eben diese Potenz den bestimmten Zahlenkoeffizienten 1 erhält, so ist demnach die Anzahl der noch willkürlichen Koeffizienten oder, da die Wahl eines Koeffizienten der Angabe eines Punkts äquivalent ist, die Anzahl der beliebig zu wählenden Punkte, durch welche die Kurve $n$ter Ordnung bestimmt ist

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Legt man daher durch die n^2 Schnittpunkte zweier Kurven $n$ter Ordnung $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ eine beliebige dritte Kurve derselben Ordnung

$$F(x, y) = f + \lambda \cdot \varphi = 0,$$

wo λ ein von den Schnittpunkten der Kurven f und φ durchaus unabhängiger noch beliebig zu wählender konstanter Faktor ist, so genügen ge-

mäfs dem Obigen zur eindeutigen Bestimmung der Kurve F, wenn dem Faktor λ ein bestimmter Wert gegeben wird d. h. wenn die Kurve F durch einen beliebigen, von den Schnittpunkten der Kurven f und φ verschiedenen Punkt aufserhalb gelegt wird, noch weitere $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte, die unter den n^2 Schnittpunkten, durch welche F hindurchgeht, beliebig ausgewählt werden können. Daraus folgt, dafs von den n^2 Schnittpunkten zweier Kurven n ter Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ dieser Schnittpunkte die übrigen

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Schnittpunkte mitbestimmt sind.

Hat man somit zwei Kurven dritter Ordnung, die sich in neun Punkten schneiden, und legt man durch acht dieser Schnittpunkte und einen beliebigen weiteren Punkt eine dritte Kurve dritter Ordnung, so geht diese auch durch den neunten Schnittpunkt der beiden ersten Kurven. Das ganze Kurvenbüschel dritter Ordnung, das man durch acht der neun Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung legen kann, schneidet sich also in einem einzigen weiteren Punkt, dem neunten Schnittpunkt der beiden geg. Kurven dritter Ordnung. Zieht man daher in den Schnittpunkten einer Geraden g mit einer bel. Kurve dritter Ordnung die drei Tangenten, so können diese als zerfallende Kurve dritter Ordnung betrachtet werden und schneiden die geg. Kurve insgesamt in neun Punkten, nämlich in den drei auf g liegenden Berührungspunkten und drei weiteren hiervon getrennten gewöhnlichen Punkten. Legt man also durch acht dieser Schnittpunkte eine neue Kurve dritter Ordnung, in diesem Fall die doppelt zu zählende Gerade g und die Verbindungsgerade zweier der drei gewöhnlichen Schnittpunkte, so mufs diese neue Kurve dritter Ordnung auch durch den neunten Schnittpunkt gehen d. h. auch der dritte gewöhnliche Schnittpunkt liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten. Hiermit sind die Schlufsfolgerungen auf diejenigen am Ende des Mac Laurin'schen Beweises zurückgeführt.

Auch in der Elementargeometrie läfst sich der Schnittpunktsrestsatz mit Vorteil verwenden, insbesondere da, wo es sich um den Nachweis handelt, dafs drei Punkte auf einer Geraden liegen, wie z. B. beim Beweis vom

Satz des Pascal.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Seiten eines einer Kurve zweiter Ordnung einbeschriebenen beliebigen Sechsecks mit den sechs ersten Ziffern der Zahlenreihe, so können die Geradentripel (1, 3, 5) und (2, 4, 6) als zerfallende Kurven dritter Ordnung betrachtet werden, durch sechs ihrer Schnittpunkte geht aber der Kegelschnitt, somit mufs die den Kegelschnitt

zur Kurve dritter Ordnung ergänzende Verbindungsgerade zweier der drei noch aufserhalb des Kegelschnitts liegenden Schnittpunkte auch durch den dritten gehen.

D. Singuläre Punkte aufserhalb des Ursprungs.

73. Verlegt man den Ursprung in den zu untersuchenden singulären Punkt (p, q) der Kurve $f(x, y) = 0$ mittels der Transformation

$$x = p + z \qquad y = q + u,$$

so gelten für die transformierte Gleichung

$$\text{(I)} \qquad F(z, u) = f(p, q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial y} u\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} zu + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u^2\right) + \cdots,$$

wo an Stelle von x und y überall die Werte z und u zu setzen sind, sämtliche Schlufsfolgerungen in 55.

Gewöhnliche Tangenten.

74. $f(p, q) = 0$ ist die Bedingung, dafs Punkt (p, q) auf der Kurve $F(z, u) = 0$ d. h. auf der Kurve $f(x, y) = 0$ liegt. Für irgend einen Wert p der Abscisse x erhält man aus $f(p, y) = 0$ die zugehörige Ordinate $y = q$ des Kurvenpunkts (p, q).

Die Richtung $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{früher} = \frac{m}{n}\right)$ der Tangente in diesem Punkt ergiebt sich (gemäfs 55.), wenn wieder an Stelle von z und u, da die Richtungen der Koordinaten sich bei der Transformation nicht geändert haben, dx und dy gesetzt wird, aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

zu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wo in den partiellen Differentialquotienten für x und y die Koordinaten des Berührungspunkts (p, q) zu setzen sind.

Maxima und *Minima.*

75. Ist die Tangente des Punkts (x, y) parallel zur Abscissenaxe, hat also die Ordinate dieses Punkts im Vergleich zu den Ordinaten der nächst benachbart gelegenen Kurvenpunkte einen gröfsten oder kleinsten Wert, so ist nach den früheren Bezeichnungen

(1) $$\frac{m}{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

ist die Tangente parallel zur Ordinatenaxe, also die Abscisse ein Maximum oder Minimum, so mufs sein

(2) $$\frac{n}{m} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Es bestimmen sich somit die am höchsten und tiefsten gelegenen Punkte der Kurve bezüglich der Abscissenaxe aus

$$f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

bezüglich der Ordinatenaxe aus

$$f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

vorausgesetzt, dafs ein derart ermittelter Kurvenpunkt nicht beiden partiellen Differentialquotienten zugleich genügt (wie im Fall eines Doppelpunkts, siehe 76.). Die näheren Unterscheidungsmerkmale, ob ein Maximum oder ein Minimum statthat, giebt De Gua nicht an. Zur Aufsuchung derselben ist aber auch seine Methode zu differenzieren, bei welcher dx und dy konstant genommen werden, also alle höheren Differentiale von x und y verschwinden, nicht geeignet, da jene Kriterien bekanntlich zunächst eben von jenen höheren Differentialen und zwar von denjenigen gerader Ordnung abhängen und sich aus der expliziten Form

(3) $$y = \varphi(x)$$

der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ leichter entwickeln lassen, wie folgt:

Ist die Ordinate eines Kurvenpunkts (x, y) ein Extrem, so berechnet sich seine Abscisse gemäfs oben als Wurzel der Bedingungsgleichung

(4) $$\frac{dy}{dx} \equiv \varphi'(x) = 0.$$

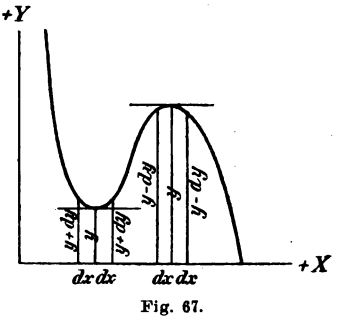

Fig. 67.

Nun mufs im Falle des Maximum bezw. Minimum die Ordinate sowohl des unendlich benachbarten vorhergehenden als auch diejenige des unendlich benachbarten folgenden Kurvenpunkts abnehmen bezw. wachsen d. h. für positive sowohl als negative Werte von dx mufs dy im Fall des Maximum negativ, im Fall des Minimum positiv sein (Fig. 67). Für einen unendlichen benachbarten Kurvenpunkt ist aber

$$y + dy = \varphi(x + dx)$$

oder nach Taylor

$$= \varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{1!}dx + \frac{\varphi''(x)}{2!}dx^2 + \frac{\varphi'''(x)}{3!}dx^3$$

also mit Berücksichtigung von (4) der differentielle Zuwachs der Ordinate dieses Punkts

$$dy = \frac{\varphi''(x)}{2!}dx^2 + \frac{\varphi'''(x)}{3!}dx^3 + \cdots \tag{5}$$

Das Vorzeichen von dy hängt somit, da dx^2 unabhängig vom Vorzeichen von dx stets positiv ist und die höheren Potenzen von dx im Vergleich zur niedersten verschwinden, nur von denjenigen von $\varphi''(x)$ ab, es besteht somit ein Maximum bezw. Minimum, wenn für den aus (4) bestimmten Wert der Abscisse $\varphi''(x)$ negativ bezw. positiv wird. Verschwindet jedoch $\varphi''(x)$, so bestimmt der Term $\varphi'''(x)dx^3$ das Vorzeichen der rechten Seite (5), dieses Vorzeichen wechselt aber gleichzeitig mit demjenigen von dx infolge der ungeraden Potenz dieses Differentials, also besteht im Falle $\varphi''(x) = 0$ weder Maximum noch Minimum, sondern ein Wendepuukt mit horizontaler Tangente (Fig. 68). Verschwindet auch noch $\varphi'''(x)$, so erhält dy das Vorzeichen von $\varphi''''(x)$, da dx^4 als gerade Potenz stets positiv ist, man hat also wieder Maximum bezw. Minimum, je nachdem $\varphi''''(x)$ negativ bezw. positiv ist, und wieder Wendepunkt (höherer Art), wenn $\varphi''''(x) = 0$ wird, daher

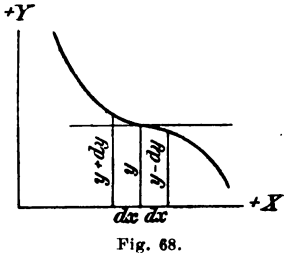

Fig. 68.

Satz: Die aus $\varphi'(x) = 0$ zu berechnenden Abscissen aller bezüglich der Abscissenaxe am höchsten und tiefsten gelegenen Punkte der Kurve $y = \varphi(x)$ bestimmen nur dann solche Punkte, wenn die nächst höhere Abteilung, welche für den betreffenden Wert der Abscisse nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist und zwar sind die Ordinaten dieser Punkte Maxima oder Minima, je nachdem diese Ableitung gerader Ordnung negativ oder positiv ist.

Um diese bezüglich der Ordinaten geltenden Kriterien auf die implizite Form der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ zu übertragen, hat man diese tota nach x zu differenzieren, wobei dx und dy als variabel zu betrachten sind. Es ist, da das Verschwinden eines Integrals $f(x, y) = 0$ auch das Verschwinden seiner totalen Differentiale nach sich zieht:

$$0 = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$0 = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

somit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{6}$$

und daher, mit Berücksichtigung von (1)

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{7}$$

Es entspricht somit dem negativen Wert von $\varphi''(x)$ gleiches Vorzeichen, dem positiven Wert entgegengesetztes Vorzeichen der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, daher

Satz: Die Ordinaten der mittels $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sich bestimmenden Punkte der Kurve $f(x, y) = 0$ sind Maxima bezw. Minima, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ für die betreffenden Koordinatenwerte gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annehmen und nicht verschwinden.

Analog ergiebt sich vertauscht:

Die Abscissen der aus $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich bestimmenden Kurvenpunkte sind Maxima bezw. Minima, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für die betreffenden Koordinatenwerte gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben und nicht verschwinden.

Verschwinden die partiellen Differentialquotienten, deren Vorzeichen die Kriterien für die Extreme abgeben, so handelt es sich entweder um Doppelpunkte oder um Wendepunkte und, wenn noch weitere Kennzeichen wieder auf Maxima und Minima im eigentlichen Sinne hinweisen, um Flachpunkte mit horizontaler Tangente, für die durch Bildung des vierten totalen Differentials von $f(x, y) = 0$ zu untersuchen wäre, ob sie ihre konkave oder konvexe Seite der Abscissenaxe zukehren u. s. f.

Doppelpunkte.

76. Mit Berücksichtigung von (74) folgen aus (73, I) gemäfs (55):

$$f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

als Bestimmungsgleichungen eines Doppelpunkts der Kurve $f(x, y) = 0$. Die Existenz eines solchen Punkts ist somit an eine Bedingung zwischen

den Koeffizienten der geg. Gleichung geknüpft, die sich durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen (1) ergiebt.

Gemäfs denselben Artikeln folgt ferner: Die Richtungen $\frac{dy}{dx}$ der Tangenten eines Doppelpunkts sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 0, \tag{2}$$

wobei in den partiellen Differentialquotienten für x und y die Koordinatenwerte des Doppelpunkts zu setzen sind. Je nachdem diese Wurzeln reell und getrennt, reell und zusammenfallend oder imaginär konjugiert sind, d. h. je nachdem bei der Auflösung der quadratischen Gleichung (2) der unter der Wurzel auftretende Radikant, die sog. Diskriminante

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtrless 0 \tag{3}$$

ist der Doppelpunkt ein gewöhnlicher Doppelpunkt oder eine Spitze I. Art oder ein isolierter Punkt I. Art. Im Falle der Spitze besteht somit noch eine zweite Bedingung zwischen den Koeffizienten der geg. Gleichung.

Die Spitzen I. Art ergeben sich somit direkt als gemeinschaftliche Wurzeln der vier Gleichungen:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

mit zwei Bedingungen in den Koeffizienten.

Um Selbstberührungspunkte der Kurve $f(x, y) = 0$ zu finden, mufs gemäfs 58, a die Doppelwurzel von (2) noch einfache Wurzel des nächst höheren Differentials sein; man hat also aufser (1) noch weitere drei Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{6}$$

wobei (6) die Ableitung von (2a) nach $\frac{dy}{dx}$ ist; dann bilden die durch Einsetzen des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) in (5) und (2a) erhaltenen Eliminate d. h. die Resultante aus (6) und (5) und die durch (3) dargestellte Diskriminante von (2a) zusammen mit (1) ein System von fünf Gleichungen in x und y, von welchen zwei zur Ermittelung der Selbstberührungspunkte genügen, während die anderen durch Einsetzen der gefundenen Koordinaten drei Bedingungen in den Koeffizienten der Kurvengleichung für das Auftreten eines Selbstberührungspunkts der Kurve ergeben.

Die Art der Selbstberührung wird bestimmt durch Verlegung des Ursprungs in den ermittelten Selbstberührungspunkt und Untersuchung gemäfs 58a.

Bezüglich der Aufsuchung der Spitzen II. Art siehe das Verfahren von Euler (Mém. de Berlin 1749, pag. 216).

Dreifache Punkte.

77. Dieselben ergeben sich aus zwei der sechs Bestimmungsgleichungen:

$$(1)\quad f(x,y)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Das Auftreten eines dreifachen Punkts ist somit an vier Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung geknüpft.

Die Richtungen der Tangenten sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(2)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\cdot dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3=0$$

mit der im zweiten Beispiel 55. gegebenen Determination.

Handelt es sich um direkte Aufsuchung eines Spitzpunkts, so folgt aus der Bedingung der dreifachen Wurzel von (2) das Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung dieser Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$; man hat also aufser den Gleichungen (1) die weiteren:

$$(2a)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$$

$$(3)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

$$(4)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Die durch Einsetzen von $\frac{dy}{dx}$ aus (4) in (2a) und (3) erhaltenen Eliminate bilden mit (1) ein System von acht Gleichungen in x und y zur Bestimmung der Spitzpunkte, deren Existenz somit an sechs Bedingungen in den Koeffizienten der Kurvengleichung geknüpft ist. Die Richtung der Tangente eines Spitzpunkts (p, q) ergiebt sich aus (4) zu

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}}{\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}}$$

für $x=p$ und $y=q$.

Vierfache Punkte.

78. In ähnlicher Weise wie der Spitzpunkt ergiebt sich die höchste Singularität des vierfachen Punkts, der Rückkehrspitzpunkt, aus einem

System von 13 Gleichungen, nämlich den drei Eliminaten von $\frac{dy}{dx}$ aus dem vierten Differential

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

und dessen drei Ableitungen nach $\frac{dy}{dx}$, den neun durch die partiellen Differentialquotienten von $\frac{\partial f}{\partial x}$ bis $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ dargestellten Gleichungen und der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$. Das Auftreten eines Rückkehrspitzpunkts ist somit an 11 Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Gleichung gebunden u. s. f.

k fache Punkte.

79. Dieselben bestimmen sich gemäfs dem Vorhergehenden aus der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ und den gleich Null gesetzten

$$2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{(k+2)(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} - 1$$

partiellen ersten, zweiten $\cdots$ $(k-1)$ten Differentialquotienten. Das Auftreten eines $k$fachen Punkts ist somit geknüpft an $\frac{k(k+1)}{2} - 3$ Bedingungen zwischen den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung.

Die k Tangenten des $k$fachen Punkts sind die Wurzeln des $k$ten Differentials

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} + \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \cdots\cdots\cdots + \binom{k}{k}\frac{\partial^k f}{dy^k}\left(\frac{dy}{dx}\right)^k = 0$$

und sind je nach der Beschaffenheit dieser Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend und imaginär konjugiert u. s. f. Die nähere Untersuchung führt man durch Parallelverschiebung des Ursprungs in den $k$fachen Punkt.

80. Auf die Äquivalenz eines $k$fachen Punkts mit der Anzahl der in ihm sich vereinigenden Doppelpunkte bezw. Spitzen I. Art geht De Gua nicht näher ein (vgl. 54.), obwohl diese Kenntnis für das richtige Verständnis der geometrischen Erzeugung eines $k$fachen singulären Punkts unentbehrlich ist. Da der $k$fache Punkt die höchste Singularität einer Kurve $(k+1)$ter Ordnung darstellt, so kann diese Kurve neben dem $k$fachen Punkt keinen Doppelpunkt mehr besitzen. Der $k$fache Punkt vereinigt somit in sich die Maximalzahl

$$\frac{(k+1-1)(k+1-2)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

von Doppelpunkten der Kurve $(k+1)$ter Ordnung, daher

Satz: Der $k$fache Punkt ist äquivalent $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten.

81. Für die eben benützte Maximalzahl von Doppelpunkten einer Kurve n ter Ordnung C_n sei hier des historischen Interesses wegen der erste von Mac Laurin herrührende Beweis angeschlossen (Geom. organica, pag. 187). Es scheint, dafs Mac Laurin ähnlich wie später De Bragelongne zunächst empirisch auf diese Zahl kam, indem er wohl in den ihm bekannten Maximalzahlen 1 und 3 der Doppelpunkte der Kurven dritter und vierter Ordnung die Anfangsglieder der arithmetischen Reihe zweiter Ordnung 1, 3, 6, 10 $\cdot\cdot$, in welcher das $(n-2)$ te Glied die höchste Zahl von Doppelpunkten einer C_n darstellt, vermutete, denn er beweist die Richtigkeit der von ihm zu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ angenommenen Maximalzahl von Doppelpunkten einer C_n indirekt, indem er durch diese Doppelpunkte eine C_{n-2} legt, dann können zur eindeutigen Bestimmung von C_{n-2}, wozu $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Punkte erforderlich sind (vgl. 72.), aufser den vorhandenen Doppelpunkten der C_n, die für C_{n-2} einfache Punkte sind, weitere

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n-2$$

einfache Punkte auf C_n beliebig gewählt werden, die zusammen mit den als Schnittpunkten von C_n und C_{n-2} doppelt zu zählenden Doppelpunkten die Gesamtzahl

$$2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 2 = n(n-2)$$

aller Schnittpunkte dieser beiden Kurven ergeben. Besitzt also C_n einen Doppelpunkt mehr, so kann C_{n-2} nur noch durch weitere $(n-2)-1$ einfache Punkte der C_n hindurchgehen, die Gesamtzahl aller Schnittpunkte beider Kurven wäre alsdann

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) + n - 3 = n(n-2) + 1$$

was unmöglich ist.

Man bezeichnet die hier von Mac Laurin erstmals benützten Kurven, welche durch die Doppelpunkte gegebener Kurven hindurchgehen, nach dem Vorgang von Herrn von Brill, als adjungierte Kurven. Sie spielen in der analytischen Geometrie, soweit es sich um Schnittpunktsätze handelt, eine wichtige Rolle, so dienen sie insbesondere zur direkten Ermittelung der Maximalzahl von Doppelpunkten einer C_n und sind mit dem von Clebsch begründeten Begriff des Geschlechts algebraischer Kurven eng verknüpft. Es zeigt sich nämlich, dafs, wenn unter den $m \cdot n$ Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven m- und $n$ter Ordnung $(m > n)$ d Doppelpunkte der Kurve niederer Ordnung sich befinden, eine gewisse Anzahl p dieser Schnittpunkte

durch die übrigen $m \cdot n - p$ Schnittpunkte mitbestimmt ist (vgl. 72.) und zwar ist diese Zahl

(a) $$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

merkwürdigerweise durchaus unabhängig von der Ordnung m der anderen Schnittkurve, vorausgesetzt, dafs $m \gtreqless n$ ist; die Zahl p repräsentiert somit, auch wenn C_n mit den verschiedensten Kurven $m$ter Ordnung in ein Schnittverhältnis tritt, dennoch stets eine einzig und allein C_n angehörige Eigenschaft und wird daher von Clebsch als Geschlecht der Kurve bezeichnet.

Da n sich nicht ändert, so ist p ein Minimum, wenn d ein Maximum ist, und umgekehrt. Soll C_n nicht zerfallen, so kann p nie negativ werden; man erhält also für den kleinsten Wert $p = 0$ die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Kurve $n$ter Ordnung zu

(b) $$D = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Als Geschlecht der Kurve bezeichnet man daher auch den Unterschied zwischen der höchst möglichen und der wirklich vorhandenen Zahl von Doppelpunkten. Eine Kurve, welche die Maximalzahl von Doppelpunkten besitzt, heifst Kurve vom Geschlecht Null, auch rationale Kurve, da sich ihre Koordinaten explizit als rationale Funktionen desselben Grads einer neuen Veränderlichen darstellen lassen, so dafs an Stelle der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = 0$ die neuen Gleichungen treten

$$x = \varphi_n(\lambda) \qquad y = \psi_n(\lambda).$$

Wendepunkte und Flachpunkte.

82. Gemäfs 55. folgt für 73. I, dafs für jeden Wendepunkt das erste Differential eine Wurzel des zweiten sein mufs. Die Richtung der Wendetangente bestimmt sich aus dem ersten Differential zu

(1) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und die Koordinaten der Wendepunkte ergeben sich daher nach Substitution dieser Wurzel (1) in das zweite Differential aus den beiden Gleichungen:

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0$$

(3) $$f(x, y) = 0.$$

83. Ist (1) auch noch eine Wurzel des dritten Differentials, besteht also aufser (2) noch die Gleichung

$$(4)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 - 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3 = 0$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (4), (2), (3) die Koordinaten des Flachpunkts mit einer Bedingung zwischen den Koeffizienten der Kurvengleichung (3), u. s. w.

Vergleich der analytischen und der Differentialmethode bezüglich der Aufsuchung besonderer Kurvenpunkte.

84. Während nach dem damaligen Stand der Wissenschaft für die Ermittelung ausgezeichneter Kurvenpunkte auf differentiellem Weg eine einheitliche Methode fehlte und die Untersuchung fast jedes einzelnen Falles das Aufsuchen neuer Hilfsverfahren erforderlich machte, so dafs man schliefslich deren fünf besafs:

1. das schon von Leibniz eingeführte Differentialdreieck zur Bestimmung der Tangentenrichtung $\frac{dy}{dx}$,

2. das ebenfalls von Leibniz angegebene und später von Fontenelle (Géom. de l'Inf., Paris 1727) genauer begründete Verfahren zur Untersuchung der Konvexität und Konkavität, das zu den Kriterien $d^2y = 0$ bezw. ∞ für Wende- und Rückkehrpunkte führte,

3. das ebenfalls von Leibniz aufgefundene und von De l'Hospital weiterhin bekannt gemachte Verfahren zur Ermittelung der Maxima und Minima,

4. das von Bernoulli und De l'Hospital angegebene und von Saurin weiter entwickelte Verfahren zur Ermittelung unbestimmter Werte,

5. die Methode der Subtangentenkurve von De l'Hospital, ein zweites Verfahren zur Ableitung der Kennzeichen für Wende- und Rückkehrpunkte,

gelingt es De Gua, die Kriterien für sämtliche besonderen Kurvenpunkte eindeutig und hinreichend in einfachster Weise mit gänzlicher Vermeidung des Begriffs des Unendlichkleinen einzig und allein mit Hilfe der Analysis des Descartes ebenfalls in Differentialausdrücken sogar der impliziten Form der Kurvengleichung aus einer einzigen Transformation $F(u, z) = 0$ in 73, I. allgemein zu entwickeln.

Die anschliefsenden kritischen Vergleiche der streng begründeten Regeln De Guas mit den aus den Prinzipien der Differentialrechnung abgeleiteten, aufser für mehrfache Punkte nur noch für Wende-, Rückkehr-, Flach- und Spitzpunkte bekannten, meist ungenügenden Kriterien (Usages pg. 268 ff.) bilden einen glänzenden Beweis für die Überlegenheit der Analysis des Descartes gegenüber der Differentialmethode in analytischen Fragen, die nicht wie die Quadratur und Rektifikation, ihrem Wesen nach die analytische

Behandlung überhaupt ausschliefsen, weil die auftretenden Differentialausdrücke wirkliche Differentiale d. h. unendlich kleine Zuwachsgröfsen darstellen, während sie bei den Untersuchungen De Guas die Rolle unbestimmter Gröfsen im Sinne der Methode der unbestimmten Koeffizienten von Descartes übernehmen.

Doppelpunkt.

85. Das im Journal des Sçavans 1703 erstmals von Saurin angegebene Kriterium für die Doppelpunkte $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ scheint von ihm bei Tangentenbestimmungen zufällig aufgefunden worden zu sein, wenigstens begründet er dasselbe erst nachträglich (Acad. de Paris 1723) durch die Existenz einer Doppelwurzel der Kurvengleichung für x sowohl als y mit Benützung der Huddeschen Regel, die er mit dem Prozefs der Differentation nach zwei Variabeln identifiziert (vgl. 17.). Eine eigentliche differentielle, auf den Begriff des Unendlichkleinen gestützte Ableitung des obigen Kriteriums aus der Eigenschaft des Doppelpunkts, dafs jede durch ihn gehende Gerade zwei unendlich benachbarte Punkte verbindet, ihr Richtungskoeffizient also unbestimmt ist, so lange sie nicht durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geht d. h. zur Tangente wird, giebt Saurin nicht. Seine Auffassung des Problems auch für $k$fache Punkte ist durchweg algebraischer Natur und die Berechnung der Tangenten aus dem $k$ten Differential eine induktive Verallgemeinerung des De l'Hospitalschen Verfahrens der wiederholten Differentiation zur Ermittelung unbestimmter Werte.

Hiermit verglichen gebührt der strengen Ableitung der De Gua'schen Kriterien der Vorzug. Nichts destoweniger ist das Saurinsche Kriterium für Doppelpunkte eindeutig und hinreichend und stimmt mit demjenigen von De Gua überein, sobald es in der Form geschrieben wird

$$0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$

wodurch ein etwaiger Irrtum, wie er bei der Form $\frac{0}{0}$ möglich ist und u. a. von Guisnée thatsächlich begangen wurde, als ob dx und dy selbst verschwinden würden, ausgeschlossen ist.

Über die Unvollständigkeit bezw. Ungenauigkeit der Kriterien mehrfacher Punkte siehe 9, 11.

Wende- und Rückkehrpunkte.

86. Die Zweideutigkeit und Unvollständigkeit der von Leibniz und De l'Hospital aufgestellten Differentialkriterien $d^2y = 0$ für Wende- und $d^2y = \infty$ für Rückkehrpunkte bringt schon Guisnée zum Ausdruck (Acad. de Paris

1706, pg. 50); auch De Gua weist auf die bestehenden Schwierigkeiten hin z. B. für den Fall einer vertikalen Tangente, wo das Kriterium $d^2y = \infty$ nicht nur einen Rückkehrpunkt, sondern mit gleichem Recht einen Wende- oder einen gewöhnlichen Berührungspunkt bezeichnet, so dafs für diese drei Arten von Punkten in dieser besonderen Lage überhaupt kein differentielles Unterscheidungsmerkmal zu bestehen scheint, da auch der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist. Aber selbst wenn die Differentialkriterien für die Wende- und Rückkehrpunkte in möglichster Vollständigkeit und Eindeutigkeit aufgestellt werden, eine Aufgabe, der sich erstmals De Gua unterzieht, so ermangeln sie der Einfachheit und Übersichtlichkeit, durch welche sich die Kriterien De Guas auszeichnen.

Zur Lösung der letztgenannten Aufgabe benutzt De Gua das Verfahren von De l'Hospital (vgl. 7.): Nimmt man die vom Ursprung aus gemessenen Abschnitte, welche die Tangenten einer Kurve auf der Abscissenaxe erzeugen, die sog. Subtangenten

$$(1) \qquad u = \pm (y \cdot \operatorname{ctg} \varphi - x) = \pm \left(y \cdot \frac{dx}{dy} - x\right) = \pm \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$$

wo (x, y) die Koordinaten des Berührungspunkts sind, zu neuen Ordinaten (unter Beibehaltung der zugehörigen Abscissen der Berührungspunkte), so bilden die erhaltenen Endpunkte eine neue Kurve, die Subtangentenkurve, welche die Beziehungen zwischen den Abscissen und Subtangenten der Punkte der ursprünglichen Kurve graphisch darstellt. De l'Hospital findet nun, dafs für Wendepunkte Maxima und Minima der Subtangente, für Rückkehrpunkte solche der Abscisse auftreten, und bestimmt, obwohl seine für Maxima wie für Minima ohne Unterschied aufgestellten Kriterien $dy = 0$ oder ∞ keine näheren Angaben enthalten, wann der eine oder der andere dieser Werte zu nehmen ist, das Kriterium für

$$\text{Wendepunkte aus } \frac{d\,\text{subtang}}{dx} = 0 \quad \text{zu } d^2y = 0$$

$$\text{Rückkehrpunkte aus } \frac{d\,\text{subtang}}{dx} = \infty \text{ zu } d^2y = \infty.$$

Dieser nicht zu verleugnenden Willkürlichkeit gegenüber giebt De Gua folgende scharfe Begründung:

Da die beiden einem Wendepunkt unendlich benachbarten Punkte einer Kurve dieselbe Subtangente haben, die jedoch von derjenigen durch die Wendetangente abgeschnittenen nur unendlich wenig verschieden ist, so entspricht jedem Wendepunkt der ursprünglichen Kurve ein bezüglich der Abscissenaxe höchst oder tiefst gelegener Punkt der Subtangentenkurve, bestimmt durch $\frac{du}{dx} = 0$; dagegen gehören zu den unendlich benachbarten

Punkten eines Rückkehrpunkts verschiedene Subtangenten, die eine bezüglich der dem Rückkehrpunkt selbst zugehörigen Subtangente, die wegen des Zusammenfallens der beiden Tangenten des Rückkehrpunkts doppelt zu zählen ist, um dasselbe Differential gröfser als die andere kleiner, den Rückkehrpunkten der ursprünglichen Kurve entsprechen daher die Maxima und Minima der Subtangentenkurve bezüglich der Ordinatenaxe, bestimmt durch $\frac{du}{dx} = \infty$. Entwickelt man daher unter Berücksichtigung der für Maxima und Minima bestehenden Einschränkung, dafs dx konstant ist, das Differential der Subtangente

$$d\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) = \frac{dy\,(dydx - dxdy - xd^2y) - (ydx - xdy)\,d^2y}{dy^2} = -\frac{ydxd^2y}{dy^2}$$

$$(2) \qquad = -\frac{\frac{d^2y}{dy^2}}{y} \cdot dx,$$

so folgt für Wendepunkte $d^2y = 0$, für Rückkehrpunkte $d^2y = \infty$ im Vergleich zu $\frac{dy^2}{y}$, welch letzterer Wert, an dessen Stelle wegen des konstanten dx auch $\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ genommen werden darf, im allgemeinen, wenn keine besondere Lage vorliegt, für Wendepunkte sowohl wie für Rückkehrpunkte endlich ist (für letztere zunächst $\frac{0}{0}$) und daher nicht in Betracht kommt.

Zugleich ergiebt sich aus (2), dafs die geg. Kurve in einem bestimmten Punkt (x, y) die konvexe oder die konkave Seite der Abscissenaxe zuwendet, je nachdem der Zuwachs der Subtangente (auf der Abscissenaxe gemessen) positiv oder negativ ist d. h. da dx konstant und dy^2 stets positiv ist, je nachdem

$$yd^2y \quad \text{oder} \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0.$$

87. Eine Ausnahmestellung nehmen zunächst diejenigen Wendepunkte ein, welche die Ordinate zur Tangente haben, für welche also $\frac{dy}{dx} = \infty$ und somit auch $\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \infty$ ist. Da in diesem Fall die beiden dem Wendepunkt unendlich benachbarten Punkte auf der Ordinate des Wendepunkts liegen, so gehören zu einer einzigen Abscisse x drei zusammenfallende Subtangenten u und da erst die beiden nächsten, um ein weiteres Differential entfernten Kurvenpunkte mit den Abscissen $x + dx$ und $x - dx$ wieder gleiche Subtangenten besitzen, die jedoch von derjenigen des Wendepunkts selbst um unendlich wenig verschieden sind, so entspricht diesem besonderen Wendepunkt der geg. Kurve ein Rückkehrpunkt der Subtangentenkurve.

Die Richtigkeit dieser Schlufsfolgerung wird bestätigt beispielsweise durch die Aufstellung der Subtangentenkurve der Kurve dritter Ordnung

$$f(x, y) = a^2(x - a) - (y - a)^3 = 0, \tag{3}$$

die in (a, a) einen Wendepunkt mit der Tangente $x = a$ besitzt. Setzt man den Wert von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{3(y-a)^2}$$

in den Ausdruck für die Subtangente

$$u = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}},$$

so ergiebt sich die Subtangentenkurve $\varphi(z, u) = 0$ durch Elimination von x und y aus dem System:

$$(y - a)^3 = a^2(x - a) \tag{3}$$

$$u = \frac{3y(y-a)^2 - a^2x}{a^2} \tag{4}$$

$$x = z. \tag{5}$$

Um jedoch die Natur des dem Wendepunkt (a, a) entsprechenden Punkts der Subtangentenkurve zu ermitteln, verlegt man den Ursprung in letzteren Punkt. Für $x = a$ und $y = a$ mufs also sein $u = 0$ und $z = 0$; man erhält daher die transformierte Gleichung der Subtangentenkurve durch Elimination von x und y aus

$$(y - a)^3 = a^2(x - a) \tag{3}$$

$$u - a = \frac{3y(y-a)^2 - a^2x}{a^2} \tag{4'}$$

$$z + a = x, \tag{5'}$$

wie folgt: Aus (4′) + (5′) ergiebt sich

$$a^2(u + z) = 3y(y - a)^2$$

oder

$$\begin{aligned} a^2(u + z) &= 3y(y-a)^2 - 3a(y-a)^2 + 3a(y-a)^2 \\ &= 3(y-a)^3 + 3a(y-a)^2 \\ &= 3a^2z + 3a\sqrt[3]{a^4z^2} \end{aligned}$$

oder

$$a(u - 2z) = 3\sqrt[3]{a^4z^2}$$

oder

$$(u - 2z)^3 - 27az^2 = 0$$

d. h. der Ursprung ist ein Rückkehrpunkt.

Die Differentialkriterien eines Wendepunkts, dessen Ordinate Tangente ist, lauten somit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = \infty,$$

sie sind dieselben wie für den gewöhnlichen Ovalpunkt und den Rückkehrpunkt, wenn die Ordinaten Tangenten sind, und doch müssen für diese drei durchaus verschiedenen Arten von Punkten auch differentielle Unterschiede bestehen, die eben, wie es scheint, in dieser Form der Darstellung der Differentiale nicht zum Ausdruck kommen. Die einzig mögliche Erklärung für diese Erscheinung besteht somit darin, dafs die Differentialquotienten je nach der Art des betreffenden Punkts von verschiedener Ordnung ∞ werden. Vergleicht man diesbezüglich die Scheitel der drei Parabeln

$$y^2 = x \qquad y^3 = x \qquad y^3 = x^2$$

und bildet man die Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \infty^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{2}{3}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \infty^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} = \infty^{\frac{5}{3}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}} = \infty^{\frac{4}{3}},$$

woraus allgemein (oder auch durch Ableitung von $y^m = Ax^n$) für den

Ovalpunkt	Wendepunkt	Rückkehrpunkt
$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}}$	$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}}$	$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}}}$
$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}}$,

so ergiebt sich aus dieser Tabelle der Exponentialbrüche von ∞ die Art der aus $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ bestimmten Punkte der Kurve $f(x, y) = 0$, falls für diese Punkte auch noch der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

Dagegen bestimmen sich aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

die Rückkehrpunkte, deren Tangenten parallel der Abscissenaxe sind, und aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

die Wendepunkte, deren Tangenten parallel der Abscissenaxe sind, letztere erhält man nach dem De Gua'schen Verfahren (vgl. 82.), weil $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und

somit, wenn kein Doppelpunkt bestehen soll, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht ebenfalls verschwinden darf, aus

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

und entsprechend ergeben sich diejenigen Wendepunkte, welche die Ordinate zur Tangente haben, aus

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

so z. B. hat die oben behandelte Kurve dritter Ordnung

$$f(x, y) = (y - a)^3 - a^2(x - a) = 0$$

zufolge

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(y - a) = 0$$

den Wendepunkt (a, a) mit der Tangente $x = a$.

88. Die Übereinstimmung der in 87. entwickelten Differentialkriterien der Wendepunkte mit den von De Gua in 82. aufgestellten ergiebt sich aus dem in 75. als Gleichung (6) entwickelten zweiten vollständigen Differential

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot d^2 y \cdot \tag{1}$$

Demgemäfs ist für Wendepunkte

$$d^2 y = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \tag{1a}$$

und somit, da bei beliebiger Lage des Wendepunkts $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwindet oder unendlich wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 0 \tag{2}$$

und daher auch das Integral

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \tag{3}$$

also besteht thatsächlich die von De Gua erstmals aufgestellte Bedingung einer gemeinschaftlichen Wurzel des nach seiner Methode gebildeten ersten (3) und zweiten Differentials (2).

Als Beispiel für den Nachweis der Übereinstimmung seiner Methode der Aufsuchung von Wendepunkten an beliebiger Stelle mit derjenigen von Leibniz bezw. De l'Hospital behandelt De Gua die verlängerte Cycloide, deren Differentialgleichung lauten möge

$$(7a - 3x) dx - 3\sqrt{2ax - x^2}\, dy = 0. \tag{3a}$$

Nach De Gua ist somit

$$(4) \qquad -3\,dx^2 - 3 \cdot \frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}}\,dx\,dy = 0$$

oder da gemäfs der Voraussetzung dx endlich ist

$$(4a) \qquad \sqrt{2ax-x^2}\,dx + (a-x)\,dy = 0$$

und somit durch Elimination von dx und dy aus (3a) und (4a)

$$\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x-a} = \frac{7a-3x}{3\sqrt{2ax-x^2}},$$

woraus

$$x = \frac{7}{4}a.$$

Nach De l'Hospital erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7a-3x}{3\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt{2ax-x^2} - \frac{(7a-3x)(2a-2x)}{2\sqrt{2ax-x^2}}}{2ax-x^2} = 0,$$

somit

$$8(2ax-x^2) + (7a-3x)(a-x) = 0,$$

woraus

$$x = \frac{7}{4}a.$$

Verschwindet $\frac{\partial f}{\partial y}$, was nicht blofs bei Rückkehrpunkten, sondern bei sämtlichen mehrfachen Punkten, ferner bei den schon oben (vgl. 87.) untersuchten Oval- und Wendepunkten statt hat, deren Tangenten der Ordinatenaxe parallel sind, so folgt aus dem vollständigen zweiten Differential (1), dafs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 0$$

und somit der aus (1) berechnete Wert für d^2y, nämlich

$$(1a) \qquad \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{0}{0}$$

d. h. unbestimmt, worin sich eben die Allgemeinheit des De Gua'schen Kriteriums ausdrückt, dafs es ein allen Arten von Doppelpunkten gemeinsames Kriterium ist. Um den Wert des Bruches (1a) für die einzelnen Fälle des Doppelpunkts zu ermitteln, benützt De Gua drei besondere Kurven dritter Ordnung, nämlich mit

1. Doppelpunkt im Ursprung:

$$x^3 + a(x^2 - y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2ax \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay = \pm 2ax\sqrt{1+\frac{x}{a}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left.\frac{3x+2a}{2a\sqrt{1+\frac{x}{a}}}\right|_{x=0} = \pm 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a.$$

Da der unbestimmte Bruch (1a) seinen Wert durch Division des Zählers mit dx^2 nicht ändert, so ist der Zähler desselben

$$Z = 6x + 2a - 2a(\pm 1)^2 = 6x$$

und da

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=0} = \pm 2ax$$

so folgt

$$d^2y = \pm \frac{6x}{2ax} = \pm \frac{3}{a}$$ d. h. endlich.

2. Rückkehrpunkt im Ursprung:

$$x^3 - a(x+y)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2a(x+y) = 3x^2 - 2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2a(x+y) = -2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2a$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{3x^2 - 2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = -\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

somit

$$Z = (6x - 2a) - 4a(-1) - 2a(-1)^2 = 6x$$

und daher

$$d^2y = \left.\frac{6x}{-2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}}}\right|_{x=0} = \infty$$

in Übereinstimmung mit der Forderung von Leibniz bezw. De l'Hospital.

3) Isoliertem Punkt im Ursprung:

$$x^3 - a(x^2+y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2ax \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ay = \pm 2ax\sqrt{\frac{x}{a}-1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{3x-2a}{\pm 2a\sqrt{\frac{x}{a}-1}}\right|_{x=0} = \pm\sqrt{-1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

somit

$$Z = (6x - 2a) - 2a\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 = 6x$$

und da

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=0} = \pm 2ax\sqrt{-1}$$

so folgt

$$d^2y = \frac{6x}{\pm 2ax\sqrt{-1}} = \frac{3\sqrt{-1}}{a} \text{ d. h. imaginär.}$$

Hiermit stellt also De Gua mit Hilfe der eigenen Differentialmethode die Kriterien für die Doppelpunkte im nächst höheren zweiten Differential d^2y auf, wobei sich in Übereinstimmung mit der Subtangentenmethode zeigt, dafs d^2y nur im Fall der Koinzidenz der Tangenten unendlich wird. Um also die Art eines aus $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ bestimmten mehrfachen Punkts einer Kurve $f(x, y) = 0$ festzustellen, ist zu untersuchen, ob für diesen Punkt $\frac{d^2y}{dx^2}$ endlich, unendlich oder imaginär wird, dem entsprechend ist der Punkt ein gewöhnlicher Doppel-, ein Rückkehr- oder ein isolierter Punkt. Wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ ebenfalls unbestimmt, so giebt das dritte Differential d^3y den Entscheid, da es sich alsdann um einen dreifachen Punkt handelt, in welcher Weise möge im Folgenden nur für die höchste Singularität des dreifachen Punkts durchgeführt werden. Jedenfalls zeigt die vorstehende kurze, auf wenige ausgezeichnete Punkte beschränkte differentielle Untersuchung, dafs, wenn schon die auf d^2y gegründeten Kriterien grofse Schwierigkeiten zu überwinden bieten, vollends, sobald es sich um implizite Funktionen höherer Ordnung handelt, die übersichtlichen eindeutigen und hinreichenden Kriterien De Guas, die (vgl. 55 und 73 ff.) für jeden beliebigen vorliegenden Fall nach analytischer Methode rasch aufgestellt werden können, den Vorzug verdienen.

Spitzpunkt und Flachpunkt.

89. Die Unvollständigkeit und Zweideutigkeit der von Maupertuis (vgl. 9.) für Spitz- und Flachpunkt aufgestellten Differentialkriterien zeigt De Gua mittels der Subtangentenkurve.

Da im Spitzpunkt drei Tangenten sich vereinigen, so gehören zur Abscisse des Spitzpunkts drei gleiche Subtangenten, die, beliebige Lage des Spitzpunkts vorausgesetzt, weder Maxima noch Minima sind. Dem Spitzpunkt entspricht daher ein Wendepunkt der Subtangentenkurve, dessen Ordinate Tangente ist, somit bestehen gemäfs 87. die Bedingungen

$$d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = \infty \quad \text{und} \quad d^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = \infty$$

oder

(1) $$d^2y = \infty \quad \text{und} \quad d^3y = \infty$$

aus welchen sich zusammen mit der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ die Spitzpunkte derselben ermitteln. Voraussetzung ist dabei noch, dafs für einen solchen Punkt d^2y, analog $\frac{du}{dx}$, von der Ordnung des Exponentialbruchs $\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ unendlich wird.

Schneidet eine gewöhnliche Tangente die geg. Kurve beiderseitig in noch je einem Punkt und vereinigen sich diese beiden Punkte mit dem Berührungspunkt der Tangente, so entsteht der Flachpunkt. Vom Berührungspunkt aus gerechnet ändert daher nach beiden Seiten hin, auf Grund dieser Entstehung, die Tangente erst beim übernächsten Punkt ihre Richtung d. h. zu drei unendlich wenig verschiedenen Abscissen gehört nur eine Subtangente oder: dem Flachpunkt entspricht ein Wendepunkt der Subtangentenkurve mit einer zur Abscissenaxe parallelen Tangente, wofür gemäfs 87. die Bedingungen lauten

$$d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad d^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = 0$$

oder

$$(2) \qquad d^2y = 0 \qquad \text{und} \qquad d^3y = 0$$

welches Ergebnis auch aus der Überlegung folgt, dafs die Ordinaten von vier konsekutiven Kurvenpunkten, nämlich

$$y$$
$$y + dy$$
$$y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + d^2y$$
$$y + 2dy + d^2y + d(y + 2dy + d^2y) = y + 3dy + 3d^2y + d^3y,$$

wenn diese Punkte auf einer Geraden, der Tangente, liegen sollen, dem Proportionallehrsatz zufolge eine arithmetische Reihe $y, y + dy, y + 2dy, y + 3dy$ bilden müssen, was nur möglich ist, wenn gleichzeitig

$$(2) \qquad d^2y = 0 \qquad \text{und} \qquad d^3y = 0.$$

Die Existenz eines jeden aus den Gleichungen (2) und der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ bestimmten Flachpunkts ist somit an eine Bedingung zwischen den Koeffizienten der gegebenen Gleichung geknüpft.

IV. Abschnitt.

Übungen.

Untersuchung der Kurven dritter Ordnung $y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$.

Verhalten im Ursprung.

90. Man erhält

für $x = 0$ drei gleiche Werte $y = 0$

„ $y = 0$ drei verschiedene Werte $x(x^2 - ax + b^2) = 0$

d. h. der Ursprung ist ein Wendepunkt mit der Ordinatenaxe als Tangente. Die Abscissenaxe schneidet die Kurve aufser im Ursprung noch in zwei weiteren reellen Punkten falls $a^2 > 4b^2$.

Mehrfache Punkte.

91. Eine Kurve dritter Ordnung kann höchstens einen Doppelpunkt besitzen. Derselbe ergiebt sich aus

$$(1) \qquad f(x, y) = y^3 - x(x^2 - ax + b^2) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0$$

welches System sich reduziert auf

$$x(x^2 - ax + b^2) = 0$$
$$3x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

woraus entweder oder

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{r} 3x^2 - 2ax + b^2 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \qquad (5) \quad \left\{ \begin{array}{r} 3x^2 - 2ax + b^2 = 0 \\ x^2 - ax + b^2 = 0 \end{array} \right\}$$

Der erste Fall ist nur möglich, wenn $b = 0$, alsdann verschwindet der Wendepunkt, an seine Stelle tritt ein Doppelpunkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten $x^2 = 0$ d. h. ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente die Ordinatenaxe ist.

Im zweiten Fall ergiebt sich der Doppelpunkt als gemeinschaftliche Wurzel zweier quadratischer Gleichungen (5). Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Resultante dieser Gleichungen, die sich berechnet aus

$$\begin{array}{r|l|l} x^2 - ax + b^2 & 3x^2 - 2ax + b^2 & 3 \\ & 3x^2 - 3ax + 3b^2 & \\ \hline & ax - 2b^2 & x^2 - ax + b^2 \left| \frac{x}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{2b^2}{a} - a\right) \right. \\ & & x^2 - \frac{2b^2}{a}x \\ \hline & & \left(\frac{2b^2}{a} - a\right)x + b^2 \\ & & \left(\frac{2b^2}{a} - a\right)x - \frac{2b^2}{a}\left(\frac{2b^2}{a} - a\right) \\ \hline & & \frac{4b^4}{a^2} - b^2 = 0 \end{array}$$

zu

oder

$$b^2(2b + a)(2b - a) = 0 \tag{6}$$

Hieraus folgt:

1) für $b = 0$ geht der letzte Divisor $ax - 2b^2 = 0$, der die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (5) darstellt, über in $ax = 0$, woraus entweder $x = 0$ d. h. der erste Fall (4) oder $a = 0$, woraus

$$y^3 = x^3$$

oder

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 0$$

also ein Zerfallen der Kurve in eine Gerade und einen auf ihr liegenden isolierten Punkt I. Art. Es ist somit nur möglich

2) dafs $\quad 2b \pm a = 0 \quad$ oder $\quad a = \pm 2b$

und daher die gemeinschaftliche Wurzel aus

$$ax - \frac{2a^2}{4} = 0 \qquad \text{zu} \qquad x = \frac{a}{2}.$$

In beiden Fällen $\pm 2b$ ergiebt sich derselbe Punkt der Abscissenaxe als Doppelpunkt. Die Tangenten desselben bestimmen sich aus dem zweiten De Gua'schen Differential

$$6ydy^2 + (2a - 6x)dx^2 = 0 \qquad \text{für } x = \frac{a}{2},\ y = 0$$

zu

$$dx^2 = 0$$

d. h. zwei mit der Ordinatenaxe zusammenfallende Tangenten, also ein Rückkehrpunkt.

Wendepunkte.

92. Eliminiert man $\frac{dy}{dx}$ als gemeinschaftliche Wurzel des ersten und zweiten Differentials nach De Gua aus

(7) $$d_1 \equiv 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - (3x^2 - 2ax + b^2) = 0$$

(8) $$d_2 \equiv 3y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (a - 3x) \qquad = 0$$

entweder mittels der Staffelrechnung oder durch Einsetzen des Werts aus (7) in (8), so folgt

(9) $$y\,[3y^3(3x - a) - (3x^2 - 2ax + b^2)] = 0$$

woraus entweder

a) $$y = 0$$

und somit wegen (1) $$0 = x(x^2 - ax + b^2)$$

also aufser dem Ursprung zwei weitere reelle Wendepunkte auf der Abscissenaxe unter der Voraussetzung $a^2 > 4b^2$; oder mit Berücksichtigung von (1)

b) $$3(x^3 - ax^2 + b^2x)(3x - a) - (3x^2 - 2ax + b^2)^2 = 0$$

vereinfacht

(10) $$(a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 = 0,$$

eine quadratische Gleichung, deren Diskriminante

$$b^4(12b^2 - 3a^2) \lessgtr 0$$

je nachdem $a^2 \gtrless 4b^2$ d. h. werden im Fall a) die beiden aufserhalb des Ursprungs liegenden Wendepunkte der Abscissenaxe imaginär, so erhält man hierfür aus (10) die reellen Abscissen zweier anderer Wendepunkte. Um zu untersuchen, ob diese neuen Wendepunkte ebenfalls imaginär sind, oder reell werden können, hat man ihre Ordinaten y zu berechnen. Dies geschieht durch Elimination von x aus dem System

(10) $$(a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 = 0$$

(1) $$x^3 - ax^2 + b^2x - y^3 = 0$$

nach dem Kettenbruchverfahren wie folgt:

$$(a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 \Big| x^3 - ax^2 + b^2x - y^3 \Big| \frac{x}{a^2 - 3b^2} + \frac{a(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}$$

$$x^3 - \frac{ab^2}{a^2 - 3b^2}x^2 + \frac{b^4}{a^2 - 3b^2}x$$

$$a \cdot \frac{4b^2 - a^2}{a^2 - 3b^2}x^2 + \frac{b^2(a^2 - 4b^2)}{a^2 - 3b^2}x - y^3$$

$$a \cdot \frac{4b^2 - a^2}{a^2 - 3b^2}x^2 - \frac{a^2b^2(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}x + \frac{ab^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}$$

$$\frac{3b^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}x - \left(\frac{ab^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2} + y^3\right) \text{ geht in}$$

$$(a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 \Big| \frac{(a^2 - 3b^2)^3 x}{3b^4(4b^2 - a^2)} + \{\cdots\} \frac{(a^2 - 3b^2)^2}{3b^4(4b^2 - a^2)}$$

$$(a^2 - 3b^2)x^2 - (\cdots)\frac{(a^2 - 3b^2)^3 \cdot x}{3b^4(4b^2 - a^2)}$$

$$\left\{\frac{a(a^2-6b^2)}{3}+\frac{(a^2-3b^2)^3y^3}{3b^4(4b^2-a^2)}\right\}x+b^4$$

$$\left\{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right\}x-\left(\frac{ab^4(4b^2-a^2)}{(a^2-3b^2)^2}+y^3\right)\cdot\left\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right\}\cdot\frac{(a^2-3b^2)^2}{3b^4(4b^2-a^2)}$$

(11) $$b^4+\left(\frac{ab^4(4b^2-a^2)}{(a^2-3b^2)^2}+y^3\right)\cdot\left\{\frac{a(a^2-6b^2)}{3}+\frac{(a^2-3b^2)^3}{3b^4(4b^2-a^2)}\cdot y^3\right\}\cdot\frac{(a^2-3b^2)^2}{3b^4(4b^2-a^2}=0$$

oder durch Reduktion

$$\frac{9b^8(4b^2-a^2)+a^2b^4(4b^2-a^2)(a^2-6b^2)}{3(a^2-3b^2)^2}+\frac{a}{3}(a^2-6b^2)y^3+\frac{a}{3}(a^2-3b^2)y^3$$

$$+\frac{(a^2-3b^2)^3}{3b^4(4b^2-a^2)}y^6=0,$$

woraus schliefslich

(11a) $$b^8(4b^2-a^2)^2+ab^4(4b^2-a^2)(2a^2-9b^2)y^3+(a^2-3b^2)^3\cdot y^6=0$$

d. h. eine in y^3 quadratische Gleichung, die höchstens zwei reelle Wurzeln liefert und da die Kubikwurzeln der letzteren, d. h. die Ordinaten y, selbst wieder reell sind, so folgt, dafs die geg. Kurve dritter Ordnung endliche reelle Wendepunkte höchstens in der Zahl drei besitzt, einer derselben liegt stets im Ursprung.

Mittelpunkte.

93. Sie bestimmen sich gemäfs 30. aus

(1) $$f(x,y)=y^3-(x^3-ax^2+b^2x)=0$$

(12) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2a-6x=0$$

(13) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=by\qquad=0$$

(14) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

zu $x=\frac{a}{3}$, $y=0$, welche Werte in (1) eingesetzt, die Bedingung ergeben

(15) $$a(9b^2-2a^2)=0$$

also entweder $a=0$, womit auch $x=0$ d. h. der Ursprung ist Mittelpunkt oder $2a^2=9b^2$, dann bleibt $x=\frac{a}{3}$, der Mittelpunkt liegt alsdann auf der Abscissenaxe.

Unendliche Zweige.

94. Da das Aggregat der Glieder höchster Ordnung

$$y^3-x^3=0$$

eine einzige reelle Wurzel $y-x=0$ besitzt, so hat die Kurve auch nur ein Paar hyperbolische Zweige in der Richtung $y=x$. Soll die Asymptote durch den Ursprung gehen, so mufs $y-x=0$ eine Wurzel des nächst

niederen Aggregats sein, was nur möglich ist, wenn $a = 0$ wird, b aber endlich bleibt, da sonst die Kurve zerfällt. Die Annäherung der Kurve an die Asymptote erfolgt alsdann gemäfs 40. a nach Art der konischen Hyperbel.

Um die Lage der Asymptote, deren Richtung $y = x$ ist, zu ermitteln, verlegt man den Ursprung in den Schnittpunkt $(0, q)$ der Asymptote mit der Ordinatenaxe, weil alsdann nur y zu ändern ist. Dies geschieht mittels der Transformation

$$y' = y - q \qquad \text{oder} \qquad y = q + y',$$

womit die Gleichung der Kurve, wenn die neue Ordinate y' wieder mit y bezeichnet wird, übergeht in

$$(y + q)^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$$

oder nach Aggregaten geordnet

$$(16) \qquad \varphi(x, y) \equiv y^3 - x^3 + 3qy^2 + ax^2 + 3q^2y - b^2x + q^3 = 0.$$

Soll also die Asymptote durch den neuen Ursprung gehen, so mufs $y = x$ eine Wurzel des Aggregats zweiter Dimension sein, somit

$$(17) \qquad 3qx^2 + ax^2 = 0, \qquad \text{woraus} \qquad q = -\frac{a}{3}$$

d. h. die Asymptote schneidet die Ordinatenaxe in der Entfernung $-\frac{a}{3}$ vom alten Ursprung.

Hat auch noch das folgende Aggregat die Wurzel $y = x$, ist also

$$(18) \qquad \frac{3a^2}{9}x - b^2x = 0 \qquad \text{woraus} \qquad a^2 - 3b^2 = 0,$$

so wird unter dieser Bedingung die Asymptote zur Wendeasymptote, die zu ihr parallele Sehnenschar besitzt daher einen Durchmesser nach Art der Kegelschnitte, da jede Sehne der Schar die Kurve nur noch in zwei endlichen Punkten schneidet (vgl. 29.). Letzteres Ergebnis folgt auch, wenn die Ordinatenaxe um den neuen Ursprung gedreht wird, bis sie mit der Asymptote zusammenfällt, wobei (16) übergeht in

$$F(z, u) = \varphi(x, y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}dx^3,$$

wo an Stelle von x, y, dx, q die Werte nu, nu, z, $-\frac{a}{3}$ zu setzen sind $\left(m = n \text{ weil } \frac{x}{y} = 1\right)$, somit

$$\begin{aligned} F(z, u) &= nu^3 - anu^2 + \frac{a^2}{3}nu - \frac{a^3}{27} - nu^3 + anu^2 - b^2n \cdot u \\ &\quad + (-3n^2u^2 + 2anu - b^2)z + \frac{1}{2}(-6nu + 2a)z^2 + \frac{1}{6}(-6)z^3 \\ (19) \qquad &= 3n^2 \cdot zu^2 + \left(3nz^2 - 2anz + n \cdot \frac{3b^2 - a^2}{3}\right)u + z^3 - az^2 + b^2z + \frac{a^3}{27}, \end{aligned}$$

woraus für $z = 0$ sich ergiebt

$$\frac{n}{3}(3b^2 - a^2)u + \frac{a^3}{27} = 0$$

d. h. zwei Schnittpunkte fallen naturgemäfs ins Unendliche und der dritte ebenfalls, sobald

$$u = -\frac{a^3}{9n(3b^2 - a^2)}$$

(18) $$3b^2 - a^2 = 0.$$

Ist aber $a = 0$, so folgt $u = 0$ d. h. die Asymptote geht durch den Ursprung in Übereinstimmung mit 94, oben.

Klassifikation.

95. Nach den von Newton in der Enumeratio gemachten Angaben, die später zuerst von Stirling, dann von Nicole bewiesen wurden (siehe Abschnitt I), läfst sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems die Gleichung einer beliebigen Kurve dritter Ordnung auf eine der vier Normalformen bringen

I. $xy^2 + y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$

III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(vgl. hierzu 114 ff.). Nun hat die Gleichung (19) der auf eine ihrer Asymptoten als Ordinatenaxe bezogenen vorliegenden Kurve dritter Ordnung

$$F(z,u) = 3n^2 \cdot zu^2 + 3n \cdot z^2u - 2an \cdot zu + \frac{(3b^2 - a^2)n}{3}u + z^3 - az^2 + b^2z + \frac{a^3}{27}$$

bereits eine Form, die der Normalform I am nächsten kommt, da somit, wenn die bestehende teilweise Übereinstimmung nicht gestört werden soll, nur noch zwei Bestimmungen über die Lage des Koordinatensystems beliebig getroffen werden dürfen, nämlich eine Verschiebung des Ursprungs auf der Ordinatenaxe und eine Drehung der Abscissenaxe Z, so wird man, um die vollständige Übereinstimmung mit der Normalform I zu erreichen, jene Verschiebungs- und Drehungswinkelgröfse so wählen, dafs die Glieder z^2u und zu verschwinden. Geht man daher (siehe Fig. 69) mittels

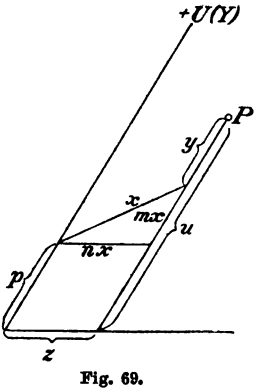

Fig. 69.

$$u = p + y + mx \qquad \text{und} \qquad z = nx$$

zu den neuen Koordinaten x, y über, so lautet mit $(p + y)$, nx, mx an Stelle von u, z, du die transformierte Gleichung

$$\Phi(x, y) = F(z, u) + \frac{1}{1!}\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}du^3,$$

wobei

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 6n^2 \cdot zu + 3nz^2 - 2anz + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 6n^2 \cdot z$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} = 0,$$

somit

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= 3n^2x(p+y)^2 + 3n^3x^2(p+y) - 2an^2x(p+y)\\ &\quad + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)(p+y) + n^3x^3 - an^2x^2 + b^2nx + \frac{a^3}{27}\\ &\quad + \left(6n^3x(p+y) + 3n^3x^2 - 2an^2x + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right)mx\\ &\quad + \frac{1}{2}\cdot 6n^3m^2x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20)\quad &= 3n^3xy^2 + 3n^3(1+2m)x^2y + 2n^2(3pn - a)xy + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)y\\ &\quad + n^3(1 + 3m + 3m^2)x^3 + n^2(3np - a + 6mnp - 2am)x^2\\ &\quad + n\left(3n^2p^2 - 2anp + b^2 + m\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right)x + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)p + \frac{a^3}{27}\end{aligned}$$

und daher

$$3n^3(1+2m) = 0 \qquad \text{und} \qquad 2n^2(3pn - a) = 0$$

woraus die einzig möglichen Werte

$$m = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad p = \frac{a}{3n}$$

mit welchen die transformierte Gleichung (20) übergeht in

$$\Phi(x, y) \equiv xy^2 + \frac{3b^2 - a^2}{9n^2}y + \frac{1}{12}x^3 + \frac{3b^2 - a^2}{18n^2}x + \frac{a(9b^2 - 2a^2)}{81n^3} = 0$$

oder

$$(21)\quad xy^2 + \frac{3b^2 - a^2}{9n^2}y = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{a^2 - 3b^2}{18n^2}x + \frac{a(2a^2 - 9b^2)}{81n^3}.$$

Da das Glied x^3 in (21) unabhängig sowohl von den Koeffizienten der geg. Gleichung (1) wie von n stets negativ ist, so sind (vgl. Opuscula Newtoni Enumeratio, pag. 258. 5) sämtliche durch Variation der Konstanten a und b entstehenden Kurven dritter Ordnung

$$(1)\qquad y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$$

defektive Hyperbeln dritter Ordnung d. h. Hyperbeln, die zum Unterschied gegen die konische Hyperbel nur eine einzige Asymptote besitzen, die entweder gewöhnliche Asymptote oder Wendeasymptote sein kann.

Die Kassinoide

(1) $$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0.$$

Ursprung und Axen.

96. Da x und y nur im Quadrat vorkommen, so erhält man für jedes beliebige x bezw. y zwei Wertepaare $\pm y$ bezw. $\pm x$ d. h. die Kurve liegt zu beiden Axen symmetrisch. Wegen des fehlenden Zeichenwechsels in der nach y^2 geordneten Gleichung

(1a) $$y^4 + 2(b^2 + x^2)y^2 + x^4 - 2b^2x^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

sind jedoch die beiden zu einem bestimmten x gehörigen Werte y^2 von entgegengesetztem Zeichen, von den vier Wurzeln y selbst sind also nur zwei reell, die beiden anderen imaginär d. h. die Parallelen zur Ordinatenaxe schneiden die Kurve stets nur in zwei zur Abscissenaxe symmetrischen Punkten.

$y = 0$ giebt aus $x^4 - 2b^2x^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$

die vier Wurzeln $x_{1,2} = \pm a$ $\qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{2b^2 - a^2}$,

man erhält also vier bezw. zwei symmetrisch liegende Schnittpunkte auf der Abscissenaxe, je nachdem $a^2 \lesseqgtr 2b^2$; ist $a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so fallen zwei der vier Schnittpunkte in den Ursprung, letzterer ist also ein Doppelpunkt und ist $a^2 = b^2$, so liegen auf der Abscissenaxe zwei zum Ursprung symmetrische Punkte I. Art $(\pm a, 0)$.

Ordnet man die geg. Gleichung nach x, also

(1b) $$x^4 + 2(y^2 - b^2)x^2 + y^4 + 2b^2y^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

so zeigt sich je nach dem Wert von y ein Zeichenwechsel oder nicht d. h. die beiden Wurzeln x^2 können sowohl gleiches als entgegengesetztes Vorzeichen haben m. a. W. die Parallelen zur Abscissenaxe treffen die Kurve entweder in vier reellen oder vier imaginären oder zwei reellen und zwei imaginären Punkten.

$x = 0$ giebt aus $y^4 + 2b^2y^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$

die vier Wurzeln $y_{1,2} = \pm a\sqrt{-1}$ $\qquad y_{3,4} = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}$,

man erhält also, und zwar unter der Voraussetzung $a^2 > 2b^2$ nie mehr als zwei reelle zum Ursprung symmetrische Schnittpunkte auf der Ordinaten-

axe; ist $a^2 < 2b^2$, so schneidet die Kurve die Ordinatenaxe überhaupt nicht und ist $a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so fallen die beiden reellen Schnittpunkte in den Ursprung, letzterer ist alsdann ein Doppelpunkt (siehe oben). Man erhält demnach zunächst folgende gestaltliche Verschiedenheiten der vorliegenden Kurve:

$a^2 < 2b^2$, so schneiden die Parallelen zur Abscissenaxe die Kurve in je vier Punkten, die Kurve besteht somit aus zwei getrennten Ovalen ohne Wendepunkte, jedes von der auf der Abscissenaxe gemessenen Länge $\pm a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}$ (Fig. 70).

$a^2 = b^2$, so wird diese Länge null d. h. die Kurve besteht nur noch aus zwei isolierten Doppelpunkten $(\pm a, 0)$.

$a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so vereinigen sich die Ovale zu einer Lemniskate mit Doppelpunkt im Ursprung, siehe 97.

$a^2 > 2b^2$, so verschwindet die Lemniskate und die Kurve wird zu einem Oval mit vier Wendepunkten, siehe 99.

Doppelpunkte.

97. Gemäfs dem Vorhergehenden tritt ein Doppelpunkt im Ursprung auf, sobald $2b^2 = a^2$ oder $a = 0$, die entstehende Lemniskate hat alsdann die Gleichung

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2b^2(y^2 - x^2) = 0. \tag{2}$$

Die Tangenten des Doppelpunkts ergeben sich aus dem Aggregat der Glieder zweiter Ordnung zu

$$(x - y)(x + y) = 0,$$

jeder dieser Faktoren kann aber zugleich als Wurzel des fehlenden Aggregats der Glieder dritter Dimension betrachtet werden, daher sind die Winkelhalbierenden des Axenkreuzes Wendetangenten des Doppelpunkts im Ursprung.

Nach dem allgemeinen Verfahren erhält man die Doppelpunkte aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 - b^2) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 + b^2) = 0 \tag{4}$$

$x = 0$ in (3) giebt aus (4) entweder $y = 0$ oder $y = \pm b\sqrt{-1}$

$x = \pm\sqrt{b^2 - y^2}$ in (3) giebt aus (4) $y = 0$ oder $b = 0$, allein für $b = 0$ würde aus der geg. Gleichung folgen $x^2 + y^2 = 0$, was unmöglich ist.

$y = 0$ in (4) giebt aus (3) entweder $x = 0$ oder $x = \pm b$.

$y = \pm\sqrt{-b^2 - x^2}$ in (4) kommt als imaginär nicht in Betracht.

Daher kann es sich nur um zwei Fälle handeln, den Ursprung und die Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe.

1. Für den Ursprung folgt aus der geg. Gleichung (1)

$$a^2(2b^2 - a^2) = 0$$

d. h. die Bedingung, unter welcher der Ursprung Doppelpunkt wird, ist entweder $2b^2 = a^2$ oder $a = 0$.

2. Für die Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe folgt als Doppelpunktsbedingung aus (1) in Übereinstimmung mit dem Früheren

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad a^2 = b^2.$$

Zur Feststellung der Art der gefundenen Doppelpunkte dient das zweite Differential nach De Gua. Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 - b^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + b^2)$$

daher

$$(5) \quad d_2 \equiv (x^2 + 3y^2 + b^2)\,dy^2 + 4xy\,dx\,dy + (3x^2 + y^2 - b^2)\,dx^2 = 0,$$

woraus für

(5a) $x = \pm b,\ y = 0 \cdots\cdots dx^2 + dy^2 = 0$ d. h. konjugierte Punkte

(5b) $x = 0, \quad y = 0 \cdots\cdots dx^2 - dy^2 = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = \pm 1,$

d. h. der Ursprung ist im letzteren Fall ein wirklicher Doppelpunkt mit den Winkelhalbierenden des Axenkreuzes als Tangenten.

Da in (1) Glieder dritter Dimension nicht auftreten, so wird man auch das dritte Differential d_3 auf die Wurzeln $\frac{dy}{dx}$ untersuchen. Es ist

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 24x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 8y \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 8x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24y$$

somit

$$d_3 = x\,dx^3 + y\,dx^2\,dy + x\,dx\,dy^2 + y\,dy^3,$$

welche Gröfse für $x = 0$, $y = 0$ identisch verschwindet, die Wurzeln (5b) von d_2 können daher auch als Faktoren von d_3 betrachtet werden d. h. die beiden Tangenten des Ursprungs sind Wendetangenten;

$$\text{für } x = \pm b,\ y = 0 \text{ wird } d_3 = 24b\,(dx^2 + dy^2)\,dx,$$

also sind auch für diese beiden Punkte die Wurzeln (5a) von d_2 zugleich Wurzeln von d_3, die isolierten Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe können daher als Schnittpunkte je zweier imaginär konjugierter Wendetangenten betrachtet werden und da

$$d_4 = 24\,dy^4 + 48\,dx^2 dy^2 + 24\,dx^4 = 24\,(dx^2 + dy^2)^2$$

so sind für diese Punkte die Wurzeln von d_2 sogar noch Wurzeln von d_4. Würde man also mittels der Taylorschen Reihe und den Werten $\pm b$, 0, z, u an Stelle von x, y, dx, dy die Gleichung der vorliegenden Kurve auf einen der beiden Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe als neuen Ursprung beziehen, so liefse sich die transformierte Gleichung, da das konstante Glied und das erste Differential, letzteres identisch, verschwinden, mit $z^2 + u^2 (\equiv dx^2 + dy^2)$ durchdividieren d. h. die transformierte Gleichung spaltet sich in zwei quadratische Faktoren oder die vorliegende Kurve zerfällt in zwei Kegelschnitte. Thatsächlich geht (1) für $a^2 = b^2$ über in

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2b^2(y^2 - x^2) + b^4$$
$$\equiv (x^2 + y^2 + 2bx + b^2)(x^2 + y^2 - 2bx + b^2),$$

die Kurve zerfällt also in zwei Kreise vom Halbmesser 0 mit den Mittelpunkten $\pm b$ auf der Abscissenaxe oder in vier imaginär konjugierte Gerade

$$y = \pm (x + b)\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad y = \pm (x - b)\sqrt{-1}.$$

Da bei Herstellung der auf einen der Doppelpunkte $(\pm b, 0)$ als Ursprung bezogenen transformierten Gleichung das zweite Differential d_2 d. h. das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in (u, z) identisch verschwindet, wenn $b = 0$ ist, was $z = 0$, $u = 0$, $a = 0$ nach sich ziehen würde, so folgt, dafs alsdann die Kurve im Ursprung einen dreifachen Punkt hätte, allein unter dieser Voraussetzung verschwindet auch d_3 identisch und die Gleichung der Kurve reduziert sich auf

$$(x^2 + y^2)^2 = 0$$

d. h. die Kurve wird zu einem isolierten vierfachen Punkt II. Art mit zwei zusammenfallenden Paaren imaginär konjugierter Tangenten.

Wendepunkte und Flachpunkte.

98. Bildet man die Bedingungsgleichungen, dafs für Wendepunkte $\frac{dy}{dx}$, aus d_1 berechnet, eine Wurzel von d_2 und für Flachpunkte auch noch eine Wurzel von d_3 ist, so kommt, beginnend mit dem einfacheren d_3, durch Einsetzen von

$$dy = -\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 - b^2)\lambda \qquad dx = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + b^2)\lambda$$

$$\begin{aligned} d_3 \equiv & -xy^3(x^2 + y^2 + b^2)^3 + xy^3(x^2 + y^2 + b^2)(x^2 + y^2 - b^2) \\ & - x^3y(x^2 + y^2 + b^2)(x^2 + y^2 - b^2) + x^3y(x^2 + y^2 - b^2)^3 \\ = & -xy(x^2 + y^2 + b^2)\{y^2(x^2 + y^2 + b^2)^2 + x^2(x^2 + y^2 - b^2)^2\} \\ & + xy(x^2 + y^2 - b^2)\{y^2(x^2 + y^2 + b^2)^2 + x^2(x^2 + y^2 - b^2)^2\} \\ = & \, 2b^2xy\{y^2(x^2 + y^2 + b^2)^2 + x^2(x^2 + y^2 - b^2)^2\} \\ = & \, 2b^2xy\{y^2(x^2 + y^2)^2 + x^2(x^2 + y^2)^2 + 2b^2(y^2 + x^2)(y^2 - x^2) + b^4(x^2 + y^2)\} \end{aligned}$$

$$(6) \quad d_3 \equiv 2b^2xy(x^2 + y^2)\{(x^2 + y^2)^2 + 2b^2(y^2 - x^2) + b^4\} = 0$$

$$d_2 \equiv x^2(x^2+3y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2)^2 - 4x^2y^2(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) + y^2(3x^2+y^2-b^2)(x^2+y^2+b^2)^2$$

$$= x^2(x^2+b^2+y^2+2y^2)(x^2+y^2-b^2)^2 - 4x^2y^2(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) + y^2(x^2+y^2-b^2+2x^2)(x^2+y^2+b^2)^2$$

$$= (x^2+y^2)\{x^2(x^2+y^2-b^2)^2 + y^2(x^2+y^2+b^2)^2\} + b^2\{x^2(x^2+y^2-b^2)^2 - y^2(x^2+y^2+b^2)^2\} + 2x^2y^2\{(x^2+y^2-b^2)^2 - 2(x^2+y^2-b^2)(x^2+y^2+b^2) + (x^2+y^2+b^2)^2\}$$

$$= (x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} + b^2\{x^2(x^2+y^2)^2 - 2b^2x^2(x^2+y^2) + b^4x^2 - y^2(x^2+y^2)^2 - 2b^2y^2(x^2+y^2) - b^4y^2\} + 8b^4x^2y^2$$

$$= (x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} + b^2x^2\{(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2+y^2) + b^4 + 4b^2y^2\} - b^2y^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(x^2+y^2) + b^4 - 4b^2x^2\}$$

$$(7) \quad d_2 \equiv [(x^2+y^2)^2 + b^2(x^2-y^2)]\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} = 0.$$

Da der gemeinschaftliche Faktor beider Differentiale d_2 und d_3, die geschweifte Klammer, nach y^2 geordnet:

$$y^4 + 2(x^2+b^2)y^2 + (x^2-b^2)^2 = 0$$

wegen des fehlenden Zeichenwechsels für alle Werte von x nur negative Wurzeln y^2, also nur imaginäre Wurzeln y ergiebt, ausgenommen für $x^2 - b^2 = 0$ oder $x = \pm b$, in welchem Fall $y = 0$ und aus der Kurvengleichung (1) die Bedingung $a^2 = b^2$ folgt, so kommen als Flachpunkte nur die Punkte $(\pm b, 0)$ in Betracht, allein für diese Koordinaten verschwindet sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial y}$, die betreffenden Punkte erfüllen also Bedingungen, die den mehrfachen Punkten, nicht aber dem Flachpunkt als einfachem Kurvenpunkt zugehören: sie sind nach den obigen Untersuchungen isolierte Punkte I. Art. Die geschweifte Klammer liefert somit als Faktor von d_3 überhaupt keinen Flachpunkt. Von den übrigen Faktoren des Differentials d_3 würde $y = 0$ mit der eckigen Klammer in d_2 kombiniert den Ursprung als Flachpunkt ergeben unter der Bedingung $2b^2 - a^2 = 0$ oder $a^2 = 0$ gemäfs (1), dieser Punkt genügt jedoch wieder den Bedingungen mehrfacher Punkte, er ist gemäfs den Untersuchungen in 97. ein Doppelpunkt mit Wendetangenten. Da endlich die Faktoren $x^2 + y^2 = 0$ und $b^2 = 0$, der eckigen Klammer (6) zufolge, sich gegenseitig bedingen und gemäfs 97. einen vierfachen isolierten Punkt II. Art ergeben, so bleibt nur noch zu untersuchen, ob der letzte Faktor $x = 0$ des Differentials d_3 einen Flachpunkt bestimmt. Für diesen Wert folgt aus der eckigen Klammer (6) entweder $y = 0$ oder $y = \pm b$. Der erste Fall ist als ausgeschlossen bereits

erledigt. Im zweiten Fall dagegen verschwindet nur $\frac{\partial f}{\partial x}$, nicht $\frac{\partial f}{\partial y}$; die Punkte $(0, \pm b)$ der Ordinatenaxe sind somit thatsächlich Flachpunkte mit Tangenten parallel der Abscissenaxe, unter der aus (1) folgenden Bedingung

$$3b^4 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

oder

$$(3b^2 - a^2)(a^2 + b^2) = 0$$

die sich, da $a^2 + b^2$ nie verschwinden kann, wenn die Kurvengleichung reelle Koeffizienten haben soll, reduziert auf

$$a^2 = 3b^2. \tag{7}$$

Die Kurve hat alsdann das Aussehen eines elliptischen Ovals ohne Wendepunkte (siehe unten).

99. Da die geschweifte Klammer in d_2 entweder imaginäre Punkte oder Doppelpunkte liefert, so bestimmen sich die Wendepunkte der geg. Kurve aus dem anderen Faktor von d_2 und der geg. Kurvengleichung, also aus

$$(x^2 + y^2)^2 + b^2(x^2 - y^2) = 0 \tag{7a}$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0 \tag{1}$$

d. h. wenn $x^2 = z$ und $y^2 = u$ gesetzt wird, analytisch als die Schnittpunkte zweier Parabeln

$$(z + u)^2 + b^2(z - u) = 0 \tag{7b}$$

$$(z + u)^2 - 2b^2(z - u) + 2a^2b^2 - a^4 = 0 \tag{8}$$

da in beiden Gleichungen (7b) und (8) die Diskriminante der Glieder höchster Dimension verschwindet. Berechnet man die Schnittpunkte direkt aus (7a) und (1) mit

$$x^2 + y^2 = v \qquad \text{und} \qquad x^2 - y^2 = w,$$

so folgt

$$x^2 = -\frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{6b^2} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} \tag{9}$$

$$y^2 = \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{6b^2} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} \tag{10}$$

daher besitzt die geg. Kurve

1. keine Wendepunkte, wenn $a^2 < 2b^2$: die Kurve besteht aus zwei getrennten Ovalen;

2. zwei Wendepunkte im Ursprung, wenn $a^2 = 2b^2$: die Kurve ist eine Lemniskate;

3. vier zu beiden Axen symmetrische Wendepunkte, wenn

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{3}} > \frac{a^2(a^2-2b^2)}{6b^2}$$

oder

$$3b^4 + 2a^2b^2 - a^4 > 0$$

oder

$$(3b^2 - a^2)(a^2 + b^2) > 0$$

oder da $a^2 + b^2$ stets positiv, also auch

$$3b^2 - a^2 > 0$$

d. h.

$$a^2 < 3b^2;$$

4. keine Wendepunkte, dafür zwei Flachpunkte, wenn $a^2 = 3b^2$, die Kurve bildet ein elliptisches Oval.

Vertauscht man in (7a) die Werte x und y d. h. bezieht man die durch (7a) dargestellte Kurve auf ein Koordinatensystem mit vertauschten Axen, so zeigt sich, dafs die neue Gleichung

$$(11) \qquad (x^2 + y^2)^2 - b^2(x^2 - y^2) = 0$$

einen Sonderfall der Gleichung (1) und zwar wegen $a = 0$ die Gleichung einer Lemniskate mit dem Parameter $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ statt b darstellt. Die Wendepunkte der Kassinoide sind somit die Schnittpunkte mit einer zur Abscissenaxe der Kassinoide senkrecht gestellten Lemniskate.

Variation der Gestalt. (Fig. 70.)

100. Da a sowohl als b nur in gerader Potenz in (1) vorkommen, so hängt die Gestalt der Kassinoide auch nur von den absoluten Werten dieser beiden Konstanten ab. Auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen erleidet somit die Kassinoide für $a = 0$ bis ∞ folgende stetig in einander übergehende Verwandlungen:

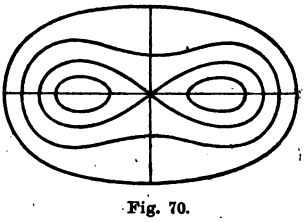

Fig. 70.

$a = 0$ eine Lemniskate,

$a^2 < b^2$ zwei Ovale ohne Wendepunkte,

$a^2 = b^2$ zwei isolierte Punkte I. Art,

$a^2 > b^2$ die ursprünglichen Ovale ohne Wendepunkte,

$a^2 = 2b^2$ die ursprüngliche Lemniskate,

$a^2 > 2b^2$ ein Oval mit vier zu beiden Axen symmetrischen Wendepunkten, die zunächst einen gröfsten Abstand von der Ordinatenaxe erreichen, dann sich derselben wieder nähern,

$a^2 = 3b^2$ ein elliptisches Oval mit zwei durch Vereinigung je zweier Wendepunkte entstandenen Flachpunkten in den Schnittpunkten mit der Ordinatenaxe,

$a^2 > 3b^2$ ein elliptisches Oval ohne Wende- und ohne Flachpunkte,

$a^2 = \infty$ dann geht Gleichung (1), da Gröfsen, die von niederer Ordnung ∞ sind, gegen solche von höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, über in

$$(x^2 + y^2)^2 - a^4 = 0$$

oder

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 + a^2) = 0$$

d. h. die Kassinoide zerfällt in zwei Kreise mit unendlich grofsen Halbmessern, der eine reell, der andere imaginär $\infty \sqrt{-1}$.

101. Um den genauen Wert von a^2 zu ermitteln, für welchen die Wendepunkte der Kassinoide eine gröfste Entfernung von der Ordinatenaxe haben, ist in dem Ausdruck (9) für x^2 die Gröfse a als variabel zu betrachten, dann wird x^2 und somit auch x ein Maximum, wenn

$$\frac{dx^2}{da} = \frac{-4a^3 + 4ab^2}{6b^2} + \frac{a^2}{6\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} = 0$$

oder

$$2(a^2 - b^2)\left(2a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} - b^2\right) = 0$$

somit, da $a^2 > 2b^2$ sein mufs (siehe 100.)

$$2a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} - b^2 = 0$$

oder

$$4a^4 - 8a^2b^2 - 3b^4 = 0$$

woraus, da a^2 stets positiv ist, die eindeutige Bedingung sich ergiebt

$$a^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) b^2$$

und daher der Maximalabstand der Wendepunkte von der Ordinatenaxe aus

$$(9)\quad x^2 = -\frac{b^2}{6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} - 1\right) + \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} - 1\right)}$$

$$= -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{8}$$

zu $x = \pm\frac{b}{4}\sqrt{2}$.

Untersuchung der Kurven vierter Ordnung:

(1) $$y^4 - 6axy^2 - 8a^2y^2 + a^2x^2 = 0$$ und

(2) $$x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$$

102. De Gua behandelt die vorliegenden beiden Kurven vierter Ordnung nur zwecks der Untersuchung des gegenseitigen Verhaltens der sich

im Ursprung durchschneidenden Zweige in Bezug auf Konvexität und Konkavität. Hierzu benötigt er die parabolischen Näherungskurven im Ursprung, die sich bei der gegebenen Form der Gleichungen (1) und (2) aus dem analytischen Dreieck nicht oder nur teilweise bestimmen lassen, weshalb die Richtung der Koordinaten entsprechend zu ändern ist.

103. Ändert man bei der Kurve (1) die Richtung der Ordinaten durch die bekannte Transformation

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

so lautet unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6ay^2 + 2a^2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$$

die Gleichung der transformierten Kurve (1a)

$$F(z,u) \equiv m^4u^4 - 6am^2n \cdot u^3 - a^2(8m^2 - n^2)u^2 - 2a(3m^2u^2 - anu)z + a^2z^2 = 0.$$

Berührt somit die Ordinatenaxe einen der Zweige des Ursprungs, der ein Doppelpunkt ist, da die Glieder niederster Ordnung von der zweiten Dimension sind, so müssen sich für $z = 0$ drei Werte $u = 0$ ergeben, das Glied u^2 mufs also verschwinden, daher

$$8m^2 - n^2 = 0,$$

woraus die Richtungen der Tangenten des Doppelpunkts

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

in Übereinstimmung mit dem, aus dem Aggregat niederster Dimension von (1)

$$a^2x^2 - 8a^2y^2 = 0$$

sich bestimmenden Tangentenpaar des Doppelpunkts im Ursprung

$$(x - 2\sqrt{2} \cdot y)(x + 2\sqrt{2} \cdot y) = 0.$$

Gleichung (1a) auf das analytische Dreieck gelegt ergiebt, dafs die Kurve sich im Ursprung verhält wie

$$2a^2n \cdot zu - 6anm^2 \cdot u^3 = 0$$

oder

$$u(az - 3m^2u^2) = 0$$

oder (da $u = 0$ nur die Eigenschaft des Doppelpunkts ausdrückt, unter allen schneidenden Geraden auch von der Abscissenaxe in zwei Punkten getroffen zu werden) wie die beiden konischen Parabeln

$$z = \frac{3m^2}{a}u^2, \tag{3}$$

von welchen die eine auf die durch $m = \frac{n}{2\sqrt{2}}$, die andere auf die durch

$m = -\frac{n}{2\sqrt{2}}$ bestimmte Doppelpunktstangente als Ordinatenaxe bezogen ist. Beide Parabeln verlaufen somit, da ihr Parameter vom Vorzeichen von m unabhängig ist, in denselben Quadranten beider Koordinatensysteme, sie kehren daher beide der positiven Seite der gemeinsamen Abscissenaxe die konkave Seite zu, wodurch die Gestalt des Doppelpunkts eindeutig bestimmt ist. (Fig. 71).

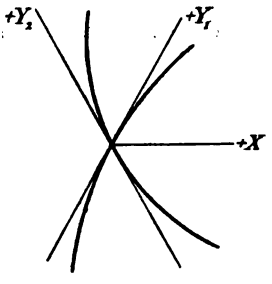

Fig. 71.

104. Bei Kurve (2) handelt es sich um einen dreifachen Punkt im Ursprung mit dem Tangententripel

$$ax^2y - by^3 = 0$$

oder

$$y\left(y - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x\right)\left(y + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x\right) = 0.$$

Da die geg. Gleichung (2) aus dem analytischen Dreieck für einen der Zweige des dreifachen Punkts die parabolische Näherungskurve

$$x^2 - ay = 0$$

ergiebt, welche die Abscissenaxe zur Scheiteltangente hat, so ist für die diesmalige Transformation zur Aufsuchung auch der übrigen Näherungsparabeln eine Richtungsänderung der Abscissen vorzuziehen. Um jedoch die Koordinaten u und z in der gewohnten Verbindung mit m und n beibehalten zu können, vertauscht man Abscissen- und Ordinatenaxe des neuen Systems, dann lauten die Transformationsgleichungen (Fig. 72)

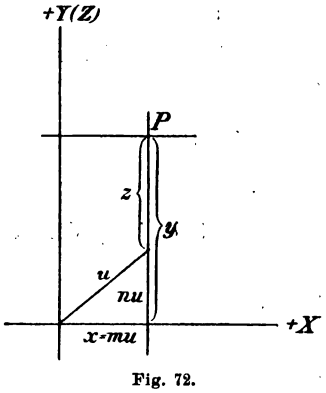

Fig. 72.

$$x = mu \qquad y = nu + z,$$

wodurch Gleichung (2) mittels der Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -ax^2 + 3by^2 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6by$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 6b \qquad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

übergeht in (2a)

$$\Phi(z,u) \equiv m^4u^4 + (bn^3 - am^2n)u^3 + (3bn^2 - am^2)u^2z + 3bn \cdot uz^2 + bz^3 = 0.$$

Soll daher die U-Axe einen der Zweige des Ursprungs berühren, so müssen sich für $z = 0$ vier Werte $u = 0$ ergeben, der Koeffizient von u^3 mufs also

verschwinden und bestimmt dadurch die Richtungen des Tangententripels im Ursprung:

$$bn^3 - am^2n = 0$$

oder

$$n\left(n - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m\right)\left(n + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m\right) = 0.$$

Nach dem analytischen Dreieck verhält sich nun die Kurve im Ursprung wie die konische Parabel

$$m^4u^2 + (3bn^2 - am^2)z = 0,$$

daher sind die auf die Tangenten des dreifachen Punkts als jeweilige Ordinatenaxen und Scheiteltangenten bezogenen Näherungsparabeln der Zweige des dreifachen Punkts

$$\text{für } n = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m \quad \ldots \quad u^2 = -\frac{2a}{m^2} \cdot z$$

$$n = 0 \quad \ldots \quad u^2 = \frac{a}{m^2} \cdot z$$

$$n = -\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m \quad \ldots \quad u^2 = -\frac{2a}{m^2} \cdot z,$$

von welchen die erste und dritte der negativen, die mittlere der positiven Z-Axe die konkave Seite zukehren, wodurch die Gestalt des dreifachen

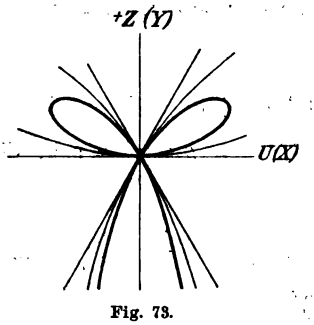

Fig. 73.

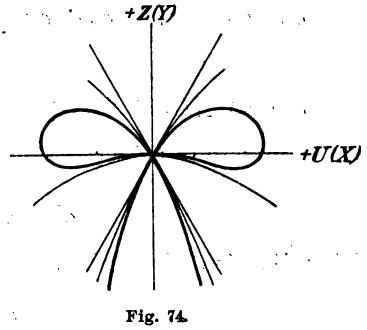

Fig. 74.

Punkts, die sich, wenn alle drei Näherungsparabeln nach derselben Seite der Abscissenaxe konkav wären, wesentlich ändern würde (Fig. 74), eindeutig bestimmt ist (Fig. 73).

Untersuchung der Kurve dritter Ordnung:

(1) $$xy^2 + ey = cx + d.$$

105. Die durch diese Gleichung dargestellten kubischen Hyperbolismen (Opusc. Newt. Enum., pg. 26) behandelt De Gua, um zu zeigen, dafs, behufs Ermittelung des aus der vorliegenden Gleichung (1) auch unter Anwendung

des analytischen Dreiecks nicht unmittelbar zu ersehenden Verlaufs der Zweige eines unendlich fernen mehrfachen Punkts, bezüglich seiner Asymptoten ein ähnliches Verfahren anzuwenden ist, wie das in 104. beschriebene, durch welches die Gestalt endlicher mehrfacher Punkte bestimmt wurde, nur treten an Stelle der konischen Näherungsparabeln die konischen hyperbolischen Asymptotenkurven. Der Koeffizient der höchsten Potenz der nach x geordneten Gleichung (1):

(1a) $$(y^2 - c)x + ey - d = 0$$

ergiebt die zur Abscissenaxe parallelen Asymptoten

$$y + \sqrt{c} = 0 \qquad \text{und} \qquad y - \sqrt{c} = 0,$$

also einen unendlich fernen Doppelpunkt in der Richtung der Abscissenaxe. Bezieht man die Kurve durch Parallelverschiebung zur Ordinatenaxe um die Strecke q mittels der Gleichungen

$$x = z \qquad y = u + q\,(= y + dy)$$

auf jene Asymptoten als neue Abscissenaxen und bildet man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0,$$

so lautet die transformierte Gleichung

$$F(z, u) \equiv u^2 z - cz + eu - d + (2uz + e)q + q^2 z = 0$$

oder, nach z geordnet,

(2) $$F(z, u) \equiv (u^2 + 2qu + q^2 - c)z + eu + eq - d = 0$$

woraus, wenn $u = 0$ Faktor des Koeffizienten von z werden soll, die Bedingung

$$q^2 - c = 0$$

und daher die eine oder andere der Asymptoten Abscissenaxe, je nachdem

$$q = \pm\sqrt{c}$$

in Übereinstimmung mit dem direkten Ergebnis aus (1). Da nach dem analytischen Dreieck die Kurve in den unendlich fernen Punkten der neuen Abscissenaxe sich verhält wie die konischen Hyperbeln

$$2q \cdot uz + eq - d = 0$$

oder

$$uz = \frac{-eq + d}{2q},$$

so ist für die Asymptote (Z-Axe) in der Entfernung von der X-Axe

(3) $$q = \sqrt{c} \cdot \cdot \text{ die Näherungskurve } uz = \frac{-e\sqrt{c} + d}{2\sqrt{c}}$$

(4) $q = -\sqrt{c}\,\cdot\cdot$ die Näherungskurve $uz = -\dfrac{e\sqrt{c}+d}{2\sqrt{c}}$,

jenachdem $d \gtrless e\sqrt{c}$ oder $d^2 \gtrless ce^2$ verläuft die erste dieser zwei Hyperbeln im I. und III. bezw. II. und IV. Quadranten des ersten Koordinatensystems, die zweite Hyperbel dagegen befindet sich stets im II. und IV. Quadranten

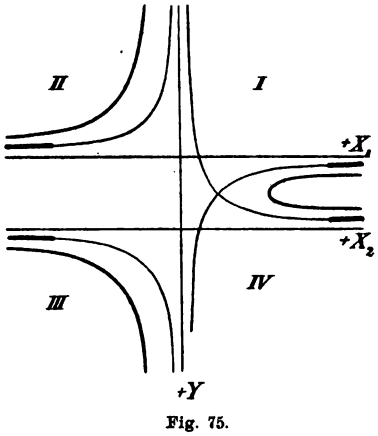

Fig. 75.

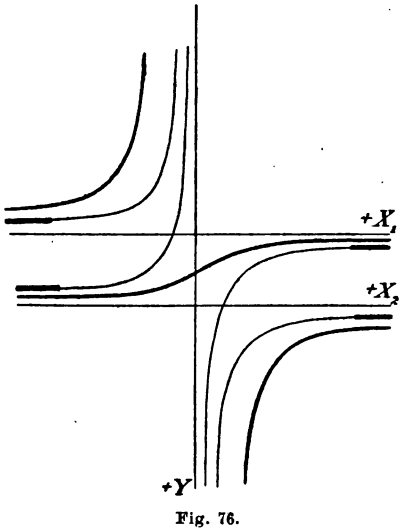

Fig. 76.

des zweiten Koordinatensystems; man erhält daher für die kubischen Hyperbolismen nur die durch die Figuren 75 und 76 dargestellten zwei Arten des Verhaltens der unendlich fernen Zweige in der Richtung der parallelen Asymptoten. Die Hyperbolismen selbst sind kräftig eingezeichnet.

Untersuchung der parabolischen Kurven:

(1) $$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots + px^n.$$

106. Mit der Beschreibung der durch diese Gleichung dargestellten parabolischen Kurven allgemeinster Art befafst sich erstmals Newton, deshalb, weil die nach Potenzen von x fortschreitende Reihe für y ihm die Interpolation der Reihen, die Quadratur der Kurven nebst einer ganzen Anzahl anderer für die damalige Zeit schwieriger Aufgaben zu lösen gestattet. Er beschränkt sich jedoch auf die blofse Angabe, dafs diese Kurven sich im Unendlichen verhalten wie

$$y = px^n$$

und abgesehen vom Grad der Krümmung, nur in zwei Typen auftreten, ent-

weder wie die gewöhnliche konische Parabel oder wie die I. kubische Parabel (Wendeparabel), je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Da $\frac{\partial f}{\partial y}$ nie verschwindet, so besitzen die Kurven keine mehrfachen Punkte, auch keine Tangenten parallel zur Ordinatenaxe, dagegen bestehen, wenn die vorliegende Kurve $n$ter Ordnung ist, $n-1$ Kulminationspunkte bezüglich der Abscissenaxe, deren Abscissen sich berechnen als die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b + 2cx + 3ex^2 + \cdots + np \cdot x^{n-1} = 0. \tag{2}$$

Da ferner alle höheren partiellen Differentialquotienten nach y, vom zweiten einschließlich an, verschwinden, so reduzieren sich die höheren Differentiale nach De Gua auf

$$d_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 \quad d_3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 \qquad d_4 = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 \text{ u. s. f.;}$$

soll daher der aus

$$d_1 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

berechnete Wert von $\frac{dy}{dx}$ eine Wurzel des zweiten, eine solche des zweiten und dritten Differentials u. s. f. sein, so ist dies nur möglich, wenn die betreffenden Differentiale verschwinden, daher bestimmen sich die

(A) Wendepunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

(B) Flachpunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$

Wendeflachpunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 0,$

erstere ohne, Flachpunkte mit einer und Wendeflachpunkte mit zwei Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung.

Für die parabolische Kurve dritter Ordnung z. B. ist

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2c + 6ex = 0, \tag{4}$$

sie besitzt somit einen Wendepunkt mit den Koordinaten

$$x = -\frac{c}{3e} \qquad y = a - \frac{9bce - 2e^3}{27e^2}.$$

Für die parabolische Kurve vierter Ordnung hat man

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2c + 6ex + 12fx^2 = 0, \tag{6}$$

die Kurve besitzt daher zwei reelle getrennte Wendepunkte oder zwei zusammenfallende d. h. einen Flachpunkt oder gar keinen Wendepunkt, je nachdem die Diskriminante

$$3e^2 - 8fc \gtreqless 0.$$

Die Abscisse des Flachpunkts berechnet sich unter vorstehender Bedingung aus (6) zu

$$x = -\frac{e}{4f}$$

in Übereinstimmung mit dem Wert, der sich ergiebt aus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6e + 24fx = 0. \tag{7}$$

Zugleich folgt aus (A) bezw. (B), dafs die parabolischen Kurven $n$ter Ordnung höchstens $n-2$ reelle Wendepunkte und höchstens $n-3$ reelle Flachpunkte besitzen und dafs jeder Wendeflachpunkt eine ungerade, jeder Flachpunkt eine gerade Anzahl von Wendepunkten in sich vereinigt.

Systematik der Kurven II. und III. Ordnung.

107. Die Aufzählung der Kurven zweiter und dritter Ordnung, die sich auf Betrachtungen der Diskriminante d. h. derjenigen Funktion stützt, die das reelle Gebiet vom imaginären trennt, giebt De Gua Anlafs zu einem erstmaligen, rein analytischen Beweis des steten Verlaufs einer algebraischen Kurve im ganzen Gebiet ihrer Ebene. Soll ein bis dahin reeller Zweig in einem seiner Punkte plötzlich aufhören d. h. die eine der beiden Koordinaten dieses Punkts imaginär werden, so ist dies nur möglich, wenn diese Koordinate, etwa die Abscisse, sich aus der Gleichung der Kurve in einer der drei Formen berechnet:

$$x = \frac{\pm\sqrt[n]{a-b}}{R} \qquad x = \frac{R}{\pm\sqrt[n]{a-b}} \qquad x = \frac{R \pm \sqrt[n]{a-b}}{Q},$$

wo R, Q, a, b reelle Gröfsen sind, n ein gerader Wurzelexponent und $b > a$ ist. Hieraus folgt, dafs imaginäre Koordinaten nur konjugiert und in gerader Anzahl auftreten können und da der Übergang von $b < a$ zu $b > a$ nur durch $b = a$ hindurch statthaben kann, für welchen Fall sich je zwei gleiche Werte

$$x = 0 \qquad x = \infty \qquad x = \frac{R}{Q}$$

ergeben, so setzt sich die Kurve an der Grenze zwischen reell und imaginär vom ursprünglichen Endpunkt aus stets reell fort entweder in der Richtung der Abscisse dieses Punkts oder erstreckt sich der Zweig ins Unend-

liche oder ist jener Endpunkt ein mehrfacher Punkt, was ebenfalls mit einem Aufhören der Kurve im Widerspruch steht.

Einteilung der Kurven II. Ordnung.

(1) $$f(x, y) = ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0.$$

108. Da das Aggregat der Glieder höchster Dimension

(2) $$ey^2 + fxy + gx^2 = 0$$

je nachdem $4eg - f^2 \gtreqless 0$ zwei reelle verschiedene oder zwei reelle gleiche oder zwei imaginär konjugierte Wurzeln $\frac{y}{x}$ hat, so ergiebt sich eine Dreiteilung der Kurven zweiter Ordnung hinsichtlich ihrer unendlich fernen Punkte.

Erster Fall.

109. Im Falle der Doppelwurzel von (2) bestehen folgende Möglichkeiten:

a) Die Doppelwurzel ist Faktor des linearen Aggregats, dann hat (1) die Form:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + A(\alpha x + \beta y) = B$$

oder

$$\left(\alpha x + \beta y + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}\right)\left(\alpha x + \beta g + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}\right) = 0$$

d. h. die Kurve zerfällt in zwei Gerade.

b) Die Doppelwurzel ist kein Faktor des linearen Aggregats, dann läfst sich die Gestalt der Kurve am besten diskutieren, wenn ihre Gleichung durch besondere Annahme des Koordinatensystems auf die möglichst einfache Form gebracht wird. Ändert man daher die Richtung der Koordinaten ab in diejenige nach dem unendlich fernen Punkt der Kurve mittels der bekannten Transformation

$$x = nu + z = (x + dx) \qquad y = mu$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy + 2gx + c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2g$$

so lautet die transformierte Gleichung

(3) $$F(z, u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (bm + cn + fmz + 2gnz)u + a + cz + gz^2 = 0;$$

soll daher die neue Ordinatenaxe die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen d. h. für $z = 0$ ein Wert $u = \infty$ sich ergeben, so folgt

$$em^2 + fmn + gn^2 = 0,$$

woraus sich mit Berücksichtigung von $4eg - f^2 = 0$ der Winkel des neuen Koordinatensystems bestimmt. zu

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{n} = -\frac{f}{2e},$$

womit (3) übergeht in

$$\begin{aligned} F(z,u) &\equiv \left(bm + cn - \frac{f^2}{2e}nz + 2gnz\right)u + a + cz + gz^2 \\ &= \left(bm + cn + \frac{4eg - f^2}{2e}n \cdot z\right)u + a + cz + gz^2 \\ &= (bm + cn)u + a + cz + gz^2 \\ &= \frac{(2ce - bf)n}{2e}u + a + cz + gz^2 \end{aligned}$$

oder, wenn an Stelle von u und z wieder die Koordinatenbezeichnungen y und x genommen werden

$$(4) \qquad F(x,y) \equiv gx^2 + cx + hy + a = 0.$$

Um das konstante Glied zu entfernen, verschiebt man den Ursprung in den Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinatenaxe d. h. setzt

$$y = y' + p,$$

dann wird aus (4), wenn die neuen Ordinaten y' wieder als y geschrieben werden

$$0 = gx^2 + cx + h(y + p) + a = gx^2 + cx + hy + hp + a$$

und somit aus

$$hp + a = 0$$

die Verschiebungsgröfse

$$p = -\frac{a}{h}$$

und daher die neue Form der Kurvengleichung

$$(5) \qquad \psi(x,y) \equiv gx^2 + cx + hy = 0.$$

Endlich läfst sich noch durch Drehung der Abscissenaxe das lineare Glied in x wegschaffen, dies geschieht durch die Transformation

$$x = nu \qquad y = mu + z\,(= y + dy),$$

wobei der einfachen Rechnung wegen die Abscissenaxe als U-Axe und die Ordinatenaxe als Z-Axe bezeichnet wird, unter Benutzung von

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = h,$$

womit (5) übergeht in

$$\psi(z,u) \equiv gn^2 \cdot u^2 + (hm + cn)u + hz = 0,$$

welche Gleichung sich, wenn die Drehung der Abscissenaxe um die aus

$$hm + cn = 0$$

bestimmte Winkelgröfse $\frac{m}{n} = -\frac{c}{h}$ erfolgt, vereinfacht in

$$gn^2u^2 + hz = 0$$

und daher, wenn die Ordinaten wieder mit y bezeichnet werden, die einfachste Form besitzt

$$\Phi(x, y) \equiv gx^2 + hy = 0. \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung folgt: Die Ordinatenaxe, die nach dem unendlich fernen Punkt der Kurve weist, ist ein Durchmesser der Kurve, da für alle negativen Werte von y, und die Kurve verläuft, wenn g und h gleiches Vorzeichen haben, nur in der Richtung der negativen Ordinatenaxe, sich stets zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von x ergeben. Die durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von y dargestellte, zur Ordinatenaxe parallele Asymptote bezw. das Asymptotenpaar hat die Gleichung

$$0 \cdot x + h = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{h}{0} = \infty$$

d. h. die unendlich ferne Gerade ist Asymptote. Die Kurve heifst Parabel.

Zweiter Fall.

110. Im Falle zweier reeller und getrennter Wurzeln von (2) erhält man eine einfachere Form der Kurvengleichung, wenn die Richtungen der Koordinaten in diejenigen der Asymptoten abgeändert werden. Man erreicht dies, indem man zuerst die Ordinatenaxe in die Richtung der einen Asymptote dreht, mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

und alsdann die Abscissenaxe parallel der anderen Asymptote stellt, mittels

$$u = kr + s \qquad z = h \cdot r,$$

also durch die gleichzeitige Transformation

$$\begin{aligned} x &= ns + (nk + h)\, r = (x + dx) \\ y &= ms + mk \cdot r \quad\; = (y + dy), \end{aligned}$$

wo nunmehr r und s die den Asymptoten parallelen Koordinaten sind. Mit Benutzung von

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy + 2gx + c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2g \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{f}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ey + fx + b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e$$

lautet die transformierte Gleichung

$$(7) \qquad f(r,s) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)s^2 + ((fm + 2gn)(nk + h) + (2em + fn)mk)rs + (g(nk + h)^2 + f(nk + h)mk + m^2k^2)r^2 + (bm + cn)s + (c(nk + h) + bmk)r + a = 0,$$

soll daher jede der Koordinatenaxen die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen d. h. sowohl für $s = 0$ ein Wert $r = \infty$ als auch umgekehrt für $r = 0$ ein Wert $s = \infty$ sich ergeben, so mufs sein

$$g(nk + h)^2 + f(nk + h)mk + m^2k^2 = 0$$
$$em^2 + fmn + gn^2 = 0,$$

woraus sich die beiden Drehungen $\frac{m}{n}$ und $\frac{h}{k}$ bestimmen. Dann geht (7) über in die Form

$$(8) \qquad A \cdot rs + B \cdot r + C \cdot s + a = 0,$$

verschiebt man daher noch den Ursprung in den Schnittpunkt der Asymptoten mittels

$$r = r' + p \qquad s = s' + q$$

und bestimmt p und q durch die Bedingungen, dafs die Koeffizienten der linearen Glieder r' und s' verschwinden, so erhält man, wenn die neuen Koordinaten r' und s' wieder mit x und y bezeichnet werden:

$$(9) \qquad xy + K = 0$$

als einfachste Gleichungsform derjenigen Kurvengattung zweiter Ordnung, für welche $4eg - f^2 < 0$ d. h. derjenigen Kurven, welche zwei reelle getrennte Asymptoten besitzen. Diese Kurven heifsen Hyperbeln. Der Ursprung des Koordinatensystems ist Mittelpunkt der Kurve, da alle Geraden $y = \lambda x$ je zwei gleiche und entgegengesetzte Werte sowohl von x als von y ergeben.

111. Da gemäfs den früheren Untersuchungen in 32. alle Kurven zweiter Ordnung, für welche $4eg - f^2 \lesseqgtr 0$ ist, einen Mittelpunkt besitzen, so hätte sich im vorliegenden Fall für die Ableitung einer einfachsten Gleichungsform noch ein weiterer Weg geboten: die Bezugnahme auf die Durchmesser der Kurve als Koordinatenaxen. Transformiert man daher den Ursprung in den Mittelpunkt der Kurve, dessen Koordinaten gemäfs 32. sind

$$p = \frac{bf - 2ce}{4eg - f^2} \qquad q = \frac{cf - 2bg}{4eg - f^2}$$

mittels $x + p = (x + dx) \qquad y + q = (y + dy)$

an Stelle von x und y, so lautet die transformierte Gleichung (1)

$$F(x,y) \equiv ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a$$
$$+ (fy + 2gx + c)p + (2ey + fx + b)q + gp^2 + fpq + gq^2$$
$$\equiv ey^2 + fxy + gx^2 + \frac{b(4eg - f^2) + f(bf - 2ce) + 2e(cf - 2bg)}{4eg - f^2}\, y$$
$$+ \frac{c(4eg - f^2) + g(bf - 2ce) + f(cf - 2bg)}{4eg - f^2}\, x$$
$$+ \frac{g(bf - 2ce)^2 + f(bf - 2ce)(cf - 2bg) + e(cf - 2bg)^2}{(4eg - f^2)^2} + a = 0$$

$$\equiv ey^2 + fxy + gx^2 + L = 0. \tag{10}$$

Die linearen Glieder verschwinden somit in Übereinstimmung mit der Eigenschaft des neuen Ursprungs als Mittelpunkt, dafs jede durch ihn gehende Gerade in zwei zu ihm symmetrischen Punkten schneidet, sich also für $y = \lambda x$ aus (10) eine sowohl in x wie in y rein quadratische Gleichung ergeben mufs. Behält man die ursprüngliche Richtung der Abscissen bei, ändert dagegen diejenige der Ordinaten mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

unter Benutzung von

$$\frac{\partial F}{\partial x} = fy + 2gx \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2g$$

so kann die transformierte Gleichung

$$\varphi(z,u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (fm + 2gn)zu + gz^2 + L = 0,$$

wenn die neue Ordinatenaxe U um die aus

$$fm + 2gn = 0 \qquad \text{zu} \qquad \frac{m}{n} = -\frac{2g}{f} \tag{11}$$

bestimmte Winkelstellung zur Abscissenaxe gebracht wird, vereinfacht werden in

$$\Phi(z,u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + gz^2 + L = 0$$

oder nach Einsetzen von (11)

$$-\frac{g(4eg - f^2)n^2}{f^2}u^2 + gz^2 + L = 0$$

oder

$$\frac{n^2(4eg - f^2)}{f^2}u^2 + z^2 + C = 0 \tag{12}$$

oder, wenn die Abscissen und Ordinaten wieder mit x und y bezeichnet werden, unter Berücksichtigung von $4eg - f^2 < 0$

$$x^2 - A \cdot y^2 + C = 0. \tag{12a}$$

Da für jedes beliebige x zwei gleiche und entgegengesetzte Werte

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2+C}{A}}$$

aber für y nur wenn $y > \sqrt{\frac{C}{A}}$ zwei ebensolche Werte $x = \pm\sqrt{Ay^2 - C}$ sich ergeben, so folgt, daſs die Koordinatenaxen konjugierte Durchmesser sind, daſs die Kurve mit vier Ästen sich ins Unendliche erstreckt und nicht geschlossen ist. Sie ist eine Hyperbel.

Ihre Asymptoten sind, da die Faktoren des höchsten Aggregats in (12a) als Faktoren des fehlenden linearen Aggregats betrachtet werden können, die Ursprungsgeraden

$$x - \sqrt{A}\cdot y = 0 \qquad \text{und} \qquad x + \sqrt{A}\cdot y = 0.$$

112. Für die allgemeine Gleichung (1) können unter der Bedingung $4eg - f^2 < 0$ d. h. wenn sie eine Hyperbel darstellt, noch folgende Sonderfälle eintreten:

a) Einer der Faktoren des höchsten Aggregats sei Faktor des linearen Aggregats, also die Gleichung von der Form

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + k(\alpha x + \beta y) + a = 0,$$

dann geht die eine der Asymptoten durch den Ursprung, nämlich

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Verschwindet noch das konstante Glied, so zerfällt die Kurve in das Geradenpaar

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y + k) = 0.$$

b) Beide Faktoren des höchsten Aggregats seien zugleich Faktoren des linearen Aggregats, was nur möglich ist, wenn letzteres verschwindet, dann hat (1) die Form

$$ex^2 + fxy + gx^2 + a = 0$$

oder

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + a = 0$$

d. h. beide Asymptoten gehen durch den Ursprung, liegen aber nicht symmetrisch zum Axenkreuz, ihre Gleichungen lauten

$$\alpha x + \beta y = 0 \qquad \text{und} \qquad \gamma x + \delta y = 0.$$

Dritter Fall.

113. Im Falle imaginärer Wurzeln von (2) d. h. imaginärer Asymptotenrichtungen ist nur die in 111. behandelte Art der Transformation möglich. Die auf konjugierte Durchmesser als Koordinatenaxen bezogene Gleichung der Kurve (12) lautet alsdann mit Berücksichtigung von $4eg - f^2 > 0$:

(12b) $$x^2 + Ay^2 + C = 0,$$

was nur möglich ist, wenn C negativ ist. Da sich die reellen Werte der Abscissen nur zwischen $\pm\sqrt{C}$ und diejenigen der Ordinaten nur zwischen $\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ sich bewegen, so ist die Kurve eine geschlossene. Sie heifst Ellipse, im Sonderfall Kreis.

Bezüglich der allgemeinen Gleichung (1) kann hier nur der eine Sonderfall eintreten, dafs die imaginär konjugierten Linearfaktoren des höchsten Aggregats gleichzeitig Faktoren des linearen Aggregats sind d. h. dafs letzteres überhaupt fehlt, dann lautet die Gleichung der Ellipse

$$ey^2 + fxy + gx^2 + a = 0.$$

Sie hat zwei imaginär konjugierte Asymptoten, deren reeller Durchschnittspunkt der Ursprung ist.

Einteilung der Kurven III. Ordnung:

(1) $f(x,y) \equiv hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0.$

114. Da das Aggregat der Glieder höchster Dimension als Gleichung dritten Grads mit reellen Koeffizienten entweder eine oder drei reelle Wurzeln $\frac{y}{x}$ besitzt, denn imaginäre Wurzeln können nur konjugiert d. h. in gerader Anzahl auftreten, so erstreckt sich jede Kurve dritter Ordnung mit mindestens zwei, höchstens sechs Zweigen ins Unendliche. Die Kurven dritter Ordnung sind somit keine geschlossenen Kurven und es ergiebt sich hinsichtlich des Verhaltens im Unendlichen auf Grund der Wurzeln der Gleichung

$$hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0$$

folgende Vierteilung:

I. Fall: Drei reelle verschiedene Wurzeln.
II. Fall: Drei reelle Wurzeln, zwei derselben gleich.
III. Fall: Eine reelle Wurzel, die beiden anderen imaginär konjugiert.
IV. Fall: Drei reelle gleiche Wurzeln.

Da an der Lage des Koordinatensystems, auf welches die allgemeine Gleichung (1) bezogen ist, insgesamt vier Änderungen vorgenommen werden können, für jede Axe eine Drehung und eine Parallelverschiebung, so ist es möglich, durch geeignete Wahl dieser Transformationen stets vier Glieder der allgemeinen Gleichung zu eliminieren.

I. Fall.

115. Giebt man den Ordinaten die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote und setzt also

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

so verschwindet das Glied u^3 bezw. y^3, wenn nach vollzogener Transformation die neuen Koordinaten im Folgenden durchweg wieder mit x und y bezeichnet werden; verschiebt man ferner den Ursprung in den Schnittpunkt von Abscissenaxe und Asymptote mittels

$$x = x' + p$$

und ordnet die transformierte, neu bezeichnete Gleichung nach fallenden Potenzen von y, so mufs das konstante Glied des Faktors der höchsten Potenz y^2 verschwinden, damit sich dieser Faktor, weil er die zur Ordinatenaxe parallelen Asymptoten darstellt, auf $x = 0$ reduziert. Die allgemeine Gleichung (1) verliert somit das Glied y^2. Nunmehr dreht man die Abscissenaxe mittels

$$x = nu \qquad y = mu + z$$

um eine Gröfse $\frac{m}{n}$, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy^2 ergiebt, wobei zu berücksichtigen ist, dafs diesmal in der transformierten Gleichung u und z mit den vertauschten Koordinaten x und y zu bezeichnen sind (vgl. 109, 5), endlich verschiebt man die neue Abscissenaxe um eine Strecke q, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy bestimmt, nachdem $y = y' + q$ gesetzt wurde, dann erhält man in Bezug auf dieses neue Koordinatensystem als Gleichung der allgemeinsten Kurve dritter Ordnung mit drei reellen und getrennten Asymptoten von verschiedener Richtung

$$\text{(Ia)} \qquad Lx^3 + Jxy^2 + Gx^2 + By + Cx + A = 0,$$

die durch Umstellen und Division mit J die Newtonsche Normalform I annimmt:

$$\text{(I)} \qquad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

In Bezug auf diese Normalform ist somit der Fall I. charakterisiert durch $a > 0$: Unter dieser Bedingung haben die Kurven (1a) drei reelle verschiedene Asymptoten:

$$x = 0 \qquad y + \sqrt{a} \cdot x = 0 \qquad y - \sqrt{a} \cdot x = 0$$

also eine Asymptote mehr denn die konische Hyperbel und werden daher von Newton als Hyperbolae redundantes bezeichnet.

Das Verhalten dieser Kurven in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe wird nach dem analytischen Dreieck angegeben durch

$$xy^2 + ey = 0 \qquad \text{oder} \qquad xy + e = 0$$

eine Hyperbel, deren Ordinaten $y = -\frac{e}{x}$ gemäfs der nach y quadratischen Gleichung (1a) die Summen der Ordinaten $y_1 + y_2$ der endlichen Schnittpunkte darstellen, in welchen die zur Ordinatenaxe parallelen Geraden die

Kurve treffen. An Stelle des geradlinigen Durchmessers, der durch Verbindung der Mitten einer Parallelschar von Sehnen entsteht, welche die Kurve in drei endlichen Punkten schneiden, tritt somit in diesem Fall, wenn der dritte Schnittpunkt ins Unendliche rückt, die Hyperbel

$$xy + \frac{e}{2} = 0$$

als Durchmesser.

Innerhalb der durch (I) dargestellten Kurvengattung dritter Ordnung kann selbst wieder eine Unterscheidung getroffen werden, einmal hinsichtlich gemeinschaftlicher Faktoren der beiden höchsten Aggregate, sodann hinsichtlich vorhandener Wendeasymptoten (vgl. 29.) oder Mittelpunkte (vgl. 33.).

Da der Faktor $x = 0$ des Aggregats dritter Dimension in (I) zugleich Faktor von bx^2 ist, auf welches Glied sich das Aggregat zweiter Dimension reduziert, so bestehen hier

1. Kurven mit einer Asymptote durch den Ursprung, die hier Ordinatenaxe ist. Diese Kurven haben unter den drei Asymptoten

a) keine Wendeasymptote, wenn $e \neq 0$,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$, daher ihre Gleichung

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

c) drei Wendeasymptoten, wenn außer $e = 0$ noch $b^2 - 4ac = 0$, daher die Gleichung dieser Kurven von der Form

$$xy^2 = x(\alpha x + \beta)^2 + d.$$

2. Kurven mit drei Asymptoten durch den Ursprung, sobald $b = 0$, da alsdann nicht nur der zweite, sondern gleichzeitig auch der dritte Faktor des höchsten Aggregats als Faktor des verschwindenden Aggregats zweiter Dimension zu betrachten ist. Diese Kurven, bei welchen somit das Dreieck der drei Asymptoten zum Punkt zusammenschrumpft, haben die Gleichung

$$xy^2 + ey = ax^3 + cx + d$$

und sie besitzen

a) keine Wendeasymptote, wenn $e \neq 0$, und einen Mittelpunkt oder nicht, je nachdem $d = 0$ oder nicht,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$, aber keinen Mittelpunkt, da die Gleichung dieser Kurven, wenn auch noch $d = 0$ wäre, zerfallen würde,

c) drei Wendeasymptoten, wenn außer $e = 0$ noch $4ac = 0$ d. h. $c = 0$, da für $a = 0$ zwei Wurzeln des höchsten Aggregats gleich würden (vgl. 116.). Diese Kurven haben keinen Mittelpunkt und ihre Gleichung lautet

$$xy^2 = ax^3 + d.$$

II. Fall.

116. Für $a = 0$ hat das Aggregat der Glieder höchster Dimension in (I) die Doppelwurzel $y = 0$. Die Gleichung dieser Kurvengattung kann daher als Sonderfall von (I) betrachtet werden und lautet

$$xy^2 + ey = bx^2 + cx + d. \tag{II}$$

Bezüglich gemeinschaftlicher Faktoren, Wendeasymptoten und Mittelpunkte ist analog 115. folgende Unterscheidung möglich:

1. $b \neq 0$, dann haben die beiden höchsten Aggregate nur einen gemeinschaftlichen Faktor $x = 0$. Nach dem analytischen Dreieck verhalten sich diese Kurven in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe wie

$xy^2 + ey = 0$ oder $xy = -e$ die konische Hyperbel

und

$xy^2 - bx^2 = 0$ oder $y^2 = bx$ die konische Parabel.

Die durch (II) dargestellten Kurven besitzen daher nur eine endliche Asymptote, die Ordinatenaxe. Dieselbe ist

a) eine gewöhnliche Asymptote, wenn $e \neq 0$,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$; die Annäherung dieser Kurven an die Ordinatenaxe erfolgt nach Art der kubischen Hyperbel

$$xy^2 = d.$$

2. $b = 0$, also sämtliche Faktoren der beiden höchsten Aggregate gemeinschaftlich, dann ergiebt sich aus der nach y bezw. x geordneten Gleichung:

$$xy^2 + ey - (cx + d) = 0$$

$$(y + \sqrt{c})(y - \sqrt{c})x + (ey - d) = 0,$$

daſs diese Kurven drei Asymptoten besitzen, nämlich die Ordinatenaxe und zwei Parallelen zur Abscissenaxe; letztere sind

a) reell und getrennt für $c > 0$. Je nachdem ein Mittelpunkt vorhanden ist oder die Ordinatenaxe Wendeasymptote wird, können hier selbst wieder Kurven unterschieden werden

α) ohne Wendeasymptote und ohne Mittelpunkt, wenn $e \neq 0$ und $d \neq 0$,

β) mit Wendeasymptote und ohne Mittelpunkt, wenn $e = 0$ und $d \neq 0$,

γ) ohne Wendeasymptote und mit Mittelpunkt, wenn $e \neq 0$ und $d = 0$,

b) reell und zusammenfallend für $c = 0$, also nur zwei endliche Asymptoten, die eine derselben doppelt zu rechnen. Hier finden sich nur Kurven ohne Mittelpunkt und

α) ohne Wendeasymptote (Ord.-Axe), wenn $e \neq 0$,

β) mit Wendeasymptote, wenn $e = 0$, also ihre Gleichung diejenige der kubischen Hyperbel

$$xy^2 = d,$$

c) imaginär konjugiert für $c < 0$ d. h. sie verschwinden; bezüglich Wendeasymptote und Mittelpunkt dieselbe Unterscheidung wie bei a).

Die letzten drei durch $a = 0$ und $b = 0$ charakterisierten Gruppen von Kurven dritter Ordnung stehen mit den Kegelschnitten in nahem Zusammenhang. Aus ihrer Gleichung

(IIa) $$xy^2 + ey = cx + d$$

folgt

$$y = \frac{-e \pm \sqrt{4cx^2 + 4dx + e^2}}{2x}$$

oder

$$y = \frac{\eta}{x},$$

wo mit η die Ordinaten der Kegelschnitte

$$(2\eta + e)^2 = 4cx^2 + 4dx + e^2$$

oder

$$cx^2 - \eta^2 + dx - e\eta = 0$$

bezeichnet sind, d. h. man erhält die Ordinaten y der durch (IIa) dargestellten Kurven dritter Ordnung durch Division der Ordinaten zugehöriger Kegelschnitte mit den bezüglichen Abscissen und zwar sind diese Kegelschnitte gemäfs 108 ff.:

Hyperbeln	für $c > 0$	wegen	$4 \cdot c \cdot (-1) < 0$
Parabeln	für $c = 0$	„	$4 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$
Ellipsen	für $c < 0$	„	$4 \cdot (-c) \cdot (-1) > 0,$

daher heifst Newton die vorliegenden drei Kurvengruppen dritter Ordnung Hyperbolismen der Hyperbel bezw. der Parabel bezw. der Ellipse.

III. Fall.

117. Dafür, dafs das Aggregat der Glieder höchster Dimension in (I) zwei imaginär konjugierte Wurzeln besitzt, ist die Bedingung $a < 0$, die Gleichung dieser Kurven lautet daher

$$xy^2 + ey = -ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Die Kurven besitzen nur noch eine reelle Asymptote, die Ordinatenaxe, also eine Asymptote weniger denn die konische Hyperbel, weshalb sie Newton als defektive Hyperbeln bezeichnet. Diese Asymptote ist

a) gewöhnliche Asymptote für $e \neq 0$,

b) Wendeasymptote für $e = 0$;

sie bestimmt somit zwei Gruppen von Kurven, die nach den Vorgängen 115. und 116. in entsprechende weitere Unterabteilungen gespalten werden können.

IV. Fall.

118. Hier können mit Bezug auf gemeinschaftliche Faktoren der höchsten Aggregate folgende drei Sonderfälle unterschieden werden:

A. Die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats ist kein Faktor der nächst niederen Aggregate.

Um den einfachsten Ausdruck der Gleichung dieser Kurven zu erhalten, die zunächst in der allgemeinsten Form

$$(1)\quad hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0$$

vorliegen möge, giebt man den Ordinaten wie früher die durch die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats bestimmte Asymptotenrichtung mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

dann verschwindet in der transformierten Gleichung, wenn man sie nach fallenden Potenzen von u ordnet, die höchste Potenz u^3, weil eine Wurzel $u = \infty$ wird und wenn man sie nach Aggregaten abnehmender Dimensionen ordnet, das Glied u^2z nebst uz^2, weil $z = 0$ eine dreifache Wurzel des höchsten Aggregats werden mufs. Verschiebt man noch die Z-Axe sich selbst parallel mittels

$$u = u' + q,$$

wo q eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von u sich bestimmt, und dreht man ferner die Z-Axe mittels

$$u' = mv + w \qquad z = nv$$

um eine Winkelgröfse $\frac{m}{n}$, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy ergiebt, wenn man zuvor v und w durch die üblichen Koordinatenbezeichnungen x und y ersetzt, dann geht (1) über in die von Newton als Normalform II aufgestellte Gleichung

$$(\text{III})\qquad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

wo noch durch Parallelverschiebung der Ordinatenaxe mittels $x = x' + p$ das in x quadratische oder lineare oder konstante Glied eliminiert werden kann, je nachdem p aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von x'^2 (hier eindeutig) bezw. x' oder dem verschwindenden konstanten Glied bestimmt wird.

Dies ist die Gleichung der fünf divergenten Parabeln, deren Verhalten in dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe, einem Wendepunkt, da das lineare Glied der in y quadratischen Gleichung (III) fehlt, nach dem analytischen Dreieck angegeben wird durch die zweite kubische Parabel

$$y^2 = ax^3.$$

B. Die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats ist eine einfache Wurzel des Aggregats der Glieder zweiter Dimension.

Um die Gleichung dieser Kurven möglichst einfach zu gestalten, giebt man den Ordinaten wieder die durch die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats in (1) bestimmte Richtung und verschiebt die Abscissenaxe sich selbst parallel, dann verschwinden, wenn in der transformierten Schlufsgleichung die Koordinaten wieder mit x und y bezeichnet sind, die Glieder y^3, xy^2, x^2y, damit $x = 0$ eine dreifache Wurzel des höchsten Aggregats wird, ferner das Glied y^2, weil $x = 0$ eine einfache Wurzel des Aggregats zweiter Dimension sein mufs, endlich das in y lineare Glied und (1) geht über in die von Newton als Normalform III aufgestellte Gleichung

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{IV}$$

Durch Drehung der Abscissenaxe und Parallelverschiebung der Ordinatenaxe können noch die Glieder bx^2 und cx weggeschafft werden wie folgt. Mittels

$$x = nu \qquad y = mu + z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

geht (IV) über in

$$\varphi(z, u) \equiv an^3u^3 + bn^2u^2 - mnu^2 + cnu + d - nuz = 0$$

oder

$$\equiv an^3u^3 + n(bn - m)u^2 + cnu + d - nzu = 0$$

und das Glied mit u^2 verschwindet, wenn die Drehung der Abscissenaxe erfolgt um die aus

$$bn - m = 0$$

bestimmte Winkelgröfse $\frac{m}{n} = b$. Die Parallelverschiebung mittels $z = z' + p$ liefert das in u lineare Glied

$$cnu - pnu = (c - p)nu,$$

welches verschwindet, wenn die Verschiebung der Ordinatenaxe um $p = c$ statt hat. Dadurch nimmt (IV), wenn z' und u durch die Bezeichnung x und y ersetzt werden, die einfachste Form an

$$xy = ax^3 + d. \tag{IVa}$$

Der einzige Vertreter dieser Kurvengruppe ist die Parabel des Descartes, deren Verhalten in dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe nach dem analytischen Dreieck angegeben wird durch

die konische Parabel $ax^3 - xy = 0$ oder $y = ax^2$

und

die konische Hyperbel . . . . . $xy = d$.

C. Die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats ist eine Doppelwurzel des Aggregats der Glieder zweiter Dimension.

Transformiert man die diese Kurven darstellende allgemeine Gleichung (1) wieder so, dafs die Ordinaten die durch die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats bestimmte Richtung annehmen, so verschwinden in der transformierten Gleichung, nachdem die neuen Koordinaten wieder mit x und y bezeichnet sind, die Glieder x^2y, xy^2, y^3 aus denselben Gründen wie im Falle B, ferner die Glieder y^2 und xy, weil $x = 0$ nunmehr eine Doppelwurzel des Aggregats zweiter Dimension ist, und (1) geht über in die von Newton als Normalform IV aufgestellte Gleichung

$$y = \alpha x^3 + bx^2 + cx + d, \tag{V}$$

welche noch durch Parallelverschiebung der Abscissenaxe um das Glied bx^2 durch geeignete Drehung dieser Axe um das Glied cx und durch Parallelverschiebung der Ordinatenaxe um das konstante Glied vereinfacht werden kann und alsdann übergeht in die Gleichung der ersten kubischen Parabel

$$y = ax^3. \tag{Va}$$

119. Mehr Möglichkeiten hinsichtlich gemeinschaftlicher oder mehrfacher Wurzeln der höchsten Aggregate der allgemeinen Gleichung dritten Grads, durch welche weitere ein neues Verhalten im Unendlichen aufweisende Kurvengattungen bestimmt würden, bestehen nicht oder es erfolgt ein Zerfallen der Kurve. Auf die Einteilung der einzelnen Kurvengattungen in Unterabteilungen geht De Gua deshalb nicht näher ein, weil sie nach den verschiedensten Gesichtspunkten z. B. bezüglich des Vorhandenseins eines Mittelpunkts, eines Doppelpunkts, von Maxima und Minima hinsichtlich der Koordinatenaxen u. s. f. durchgeführt werden kann und in der Enumeratio Newtons bereits bearbeitet vorliegt.

An den obigen beiden Beispielen der Aufzählung der Kurven zweiter und dritter Ordnung zeigt somit De Gua erstmals die einzige streng analytische, auf das Auftreten mehrfacher und gemeinschaftlicher Wurzeln der höheren Aggregate der Kurvengleichung gegründete Methode, nach welcher die Systematik der Kurven jeder beliebigen Ordnung mit Schärfe durchgeführt werden kann.

Anhang.

Biographische Notizen

nach Poggendorff, Handwörterbuch der exakten Wissenschaften.

De Bragelongne, Christophe Bernard — geb. 1688 in Paris, Abbé, Doyen et Comte de l'Eglise royal de St. Julien de Brioude, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, gest. daselbst am 20. Februar 1744 (Eloge siehe Mém. de l'acad. royale de Paris 1744).

Clairaut, Alexis Claude — geb. 13. Mai 1713 in Paris, las schon im zwölften Jahre eine Abhandlung über neue Kurven, die sich am Schluſs der Abhandlungen seines Vaters Jean Baptiste Clairaut in den Miscell. Berol. T. IV. 1734 gedruckt findet, von seinem achtzehnten Jahre an Mitglied der Akademie der Wissensch. zu Paris, Teilnehmer an der französischen Gradmessung in Lappland 1736—1737, gest. den 17. Mai 1765 in Paris (Eloge siehe Mém. Paris 1765).

Cramer, Gabriel — geb. den 31. Juli 1704 in Genf, Professor der Mathematik und Philosophie an der Akademie daselbst, gest. den 4. Januar zu Bagnols bei Nismes.

Descartes, René — geb. 1596 in La Haye in der Touraine, aus altem Adelsgeschlecht, beschäftigte sich von Kindheit an mit Philosophie und Mathematik, kam 1612 nach Paris, ging 1617 zur Armee des Prinzen Moritz von Oranien, trat bei Beginn des dreiſsigjährigen Krieges als Freiwilliger in das bairische Heer unter Tilly, verlieſs dasselbe 1621, verbrachte dann fünf Jahre auf Reisen, unterdessen stets Mathematik studierend, ging 1628 nach Holland (Leyden), wo er 21 Jahre lang zurückgezogen seinen Studien lebte und alle Einladungen an fürstliche Höfe insbesondere diejenigen des Königs Louis XIII. und des Kardinals De Richelieu zurückwies, bis er schlieſslich doch dem Ruf der Kunst und Wissenschaft liebenden Königin Christine als Bibliothekar an den schwedischen Hof Folge leistete 1649. Er starb kurz darauf am 11. Februar 1650 zu Stockholm und liegt heute begraben in der Eglise de St. Etienne du Mont zu Paris. 1637 erschien seine wichtige Entdeckung, die ihn zum Begründer der analytischen Geometrie macht, in dem Abschnitt „La Géométrie" im Anschluſs an die „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences". Er ist zugleich der Begründer der neueren Philosophie, indem er in den „Meditationes de prima philosophia" (1641) und den „Principia philosophiae" (1644), vom Zweifel an allem Wissen ausgehend, als unumstöſslich gewiſs nur das Selbstbewuſstsein oder das

Denken gelten läfst, woraus sich ihm die Gewifsheit des Daseins ergiebt, daher sein Satz: „Cogito, ergo sum.“ 1647 erhielt er von Frankreich eine lebenslängliche Rente als Anerkennung für seine Leistungen.

De Fontenelle, Bernard Le Bovier — geb. den 11. Februar 1657 zu Rouen, Litterat, Mitglied und (1699—1741) beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Paris, auch Mitglied der Acad. française, gest. den 9. Januar 1757 zu Paris.

Girard, Albert — holländischer oder niederländischer Mathematiker, von dem man nur weifs, dafs er 1633 in Armut starb.

De Gua de Malves, Jean Paul — geb. etwa 1712 in Carcassonne en Languedoc, aus altem Adelsgeschlecht, wurde, da die Familie ihr Vermögen durch Beteiligung an unglücklichen Spekulationen der Regierung verlor, Priester, war bereits Académicien de l'Académie royale de Bordeaux, als er 1740 seine „Usages de l'analyse de Descartes“ schrieb, auf Grund deren er 1741 als Geometer in die Akademie der Wissenschaften zu Paris aufgenommen wurde. Auch die Royal Society in London ernannte ihn später zu ihrem Mitglied. Er starb am 2. Juni 1786 in Paris als Prieur de St. George-de-Vigon und Pensionnaire der Akademie (Eloge siehe Mém. Paris 1786).

Guisnée, königl. Professor und aufserordentlicher Ingenieur des Königs, seit 1707 Mitglied (Mécanicien pensionnaire) der Akademie der Wissenschaften zu Paris. Ort und Tag der Geburt unbekannt. gest. 1718.

De l'Hospital, Guillaume François — Chevalier, Marquis de Ste. Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, la Bréau u. a. O., geb. 1661 in Paris, war einige Jahre Rittmeister in der französischen Armee, dann Privatmann, seit 1693 Ehrenmitglied der Akademie der Wissensch. zu Paris, gest. daselbst 1704 (Eloge siehe Mém. Paris 1704).

Hudde, Johann — geb. etwa 1633 in Amsterdam, gest. daselbst am 16. April 1704, erst Ratsherr, dann Schöffe und Bürgermeister von Amsterdam.

Mac Laurin, Colin — geb. im Februar 1698 zu Kilmoddan bei Inverary (Schottland), schon von 1717 an Professor der Mathematik am Marishal College in Aberdeen bis 1725, dann in derselben Eigenschaft an der Universität zu Edinburg und seit 1719 Mitglied der Royal Society in London. Bei dem von Jakobs II. Enkel, Karl Eduard, erregten jakobitischen Aufstand 1745 flüchtete er von Edinburg, weil diese Stadt, ungeachtet er sie gegen die Rebellen zu befestigen gesucht, von diesen eingenommen ward, nach York und starb daselbst am 14. Juni 1746.

Leibniz, Gottfried Wilhelm — geb. am 2. Juni 1646 in Leipzig, wurde 1666 Dr. juris, 1672 Rat beim höchsten Gericht des Kurfürsten von Mainz, dann Rat des Herzogs von Braunschweig-Lüneburg, hierauf Bibliothekar, Geheimer Justizrat und Historiograph des Herzogs von Hannover 1696, wurde 1709 vom Kaiser zum Freiherrn und Reichshofrat ernannt und starb am 14. November 1716 in Hannover. Er war der gröfste Gelehrte seiner Zeit: Mathematiker (Erfinder der Differentialrechnung), Philosoph (Monadologie), Rechtsgelehrter, Staatsmann und Theolog. Erster Präsident der auf seine Veranlassung 1700 in Berlin gegründeten Akademie

der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie seit 1669 sowie der Royal Society in London seit 1673 (Eloge siehe Mém. Paris 1716).

De Maupertuis, Pierre Louis Moreau — geb. den 17. Juli 1698 in St. Malo, erst Dragoneroffizier in der französischen Armee, in die er 1718 eintrat, dann Privatmann und von 1731 an besoldetes Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, als welches er die 1736 zur Gradmessung nach Lappland ausgesandte Expedition leitete, wurde 1741 von Friedrich dem Grofsen nach Berlin berufen und war Präsident der physikalischen Klasse der Berliner Akademie von 1745 bis 1753, wo er in sein Vaterland zurückkehrte. Er starb am 27. Juli 1759 in Basel.

Newton, Isaak — geb. den 25. Dezember (A. St.) 1642 zu Whoolsthorpe (Dorf im Kirchspiel Colsterworth bei Grandham in Lincolnshire), Sohn eines kleinen Gutsbesitzers. Nachdem er 1660 das Trinity College in Cambridge bezogen und darin alle akademischen Stufen erstiegen hatte, wurde er Professor der Mathematik an demselben, an Stelle von J. Barrow, von 1699—1701, daneben 1695 Aufseher (Warden) der königlichen Münze und von 1699 bis zu seinem Tode in Kensington (London) am 20. März (A. St.) 1726 königlicher Münzmeister (Master and Worker of the Mint) in London mit 1500 £ Gehalt. Er wurde 1701 zum Parlamentsmitglied gewählt, 1705 zum Sir erhoben, war seit 1671 Mitglied der Royal Society und seit 1703 Präsident derselben, seit 1699 auch auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie (Eloge siehe Mém. Paris 1727),

Nicole, François — geb. den 23. Dezember 1683 in Paris, gest. daselbst am 18. Januar 1758. Mitglied (Mécanicien pensionnaire) der Akademie der Wissenschaften zu Paris, bewies u. a. einem Herrn Mathulon aus Lyon die Fehlerhaftigkeit seiner Quadratur des Kreises und bekam dafür den von diesem ausgesetzten Preis von 3000 Livres (Eloge siehe Mém. Paris 1758).

Saurin, Josef — geb. 1659 zu Courtaison (Vaucluse), war reformierter Prediger erst zu Eure im Dauphiné, dann zu Berthier im Kanton Bern, kehrte aber nach Frankreich zurück, ging zum Katholizismus über und erhielt dafür von Louis XIV. eine Pension; seit 1717 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, gest. daselbst am 29. Dezember 1737.

Stirling, James — geb. etwa 1696 zu St. Ninians in der Grafschaft Stirling (Schottland), in Oxford gebildet und wenigstens in späteren Jahren Agent der schottischen Bergbaugesellschaft zu Leadhills, von wo aus er sich 1746 vergeblich um die durch Mac Laurins Tod erledigte Professur in Edinburg bewarb, die Matthew Stewart erhielt; seit 1729 Mitglied der Royal Society in London, gest. den 5. Dezember 1770 in Leadhills, sonst nichts über ihn bekannt.

Taylor, Brook — geb. den 18. August 1685 zu Edmonton in Middlesex, Dr. juris, vermögender Privatmann, unter Keil, Machin u. a. in Cambridge zum Mathematiker gebildet, ohne amtliche Stellung; seit 1712 Mitglied und von 1714 bis 1718 auch Sekretär der Royal Society in London, gest. daselbst am 29. Dezember 1731.